Ruggero Ferro

Numeri reali, iperreali, infinitesimi infiniti, da INVENTARE o da COSTRUIRE?

Non si è menzionato lo scoprire.

I numeri reali sono stati inventati o costruiti?

Una nozione precisa di reale si sviluppa solo verso la fine del 1800, con le costruzioni delle classi di equivalenza di successioni di Cauchy sui razionali o come elementi separatori delle sezioni di Dedekind costruite sui razionali, ma erano usati anche prima.

Così i reali sono prima frutto di invenzione e poi costruiti?

Analizziamo cosa si intende per inventare?

Esempi di inventare.

Imprecisione di cos'è stato inventato.

Tanti modi di costruire l'inventato.

Costruire. Esempio di costruire.

Inventare come costruire.

Costruzioni ideali, perché farle?

Consistenza relativa.

Inventato: impreciso.

Costruito: preciso caso particolare.

Precisare l’invenzione: assiomatizzazione.

L’assiomatizzazione non dice di cosa si parla, ma, sapendo di cosa si parla, ne permette l’uso e la gestione in modo condiviso.

Quale situazione porta ad inventare i numeri reali?

Il voler cogliere la continuità non trova soluzione mediante i razionali.

Non si può misurare contando con i razionali.

La geometria greca si sviluppa senza richiedere di misurare tutto con i numeri: la retta era vista come un ente in se, sul quale possono essere individuati dei punti quando interseca qualcos’altro, ma non come un insieme di punti.

L’introduzione delle coordinate cartesiane e della geometria analitica richiedono una diversa visione della retta, ora costituita di punti opportunamente posti.

Quando sono posti opportunamente?

Si possono localizzare i buchi/le interruzioni dei razionali sulla retta mediante approssimazioni sempre più fini con razionali, utilizzando o le sezioni di Dedekind sui razionali o successioni di Cauchy sui razionali.

La continuità vuole che sia le sezioni di Dedekind sui razionali e che le classi di equivalenza di successioni di Cauchy sui razionali indichino almeno un punto sulla retta: se questo non è razionale, ecco una buona indicazione di una interruzione della continuità tra i razionali.

Le approssimazioni razionali di ciascuno dei due tipi sono in quantità più che numerabile: bisogna inventare un'enorme quantità di numeri affinché si possa avere una biettività tra loro e i punti della retta.

Ma che punti ha la retta?

I metodi di approssimazione sempre migliore mediante razionali individuano un solo punto o un intervallo di punti?

Diverse visioni della retta.

Dato un qualsiasi numero naturale positivo n, questi metodi di approssimazione possono portare a una precisione migliore di 1/n.

Se i metodi di approssimazione sempre migliore mediante razionali avvicinano più punti questi dovranno essere tra loro infinitamente vicini.

L'archimedeità non vuole punti infinitamente vicini, ma questa è una particolare scelta di com'è fatta la retta.

Per avere un sistema numerico in biiettività con i punti di una retta archimedea bisognerà inventare un unico numero per ogni modo di approssimare sempre meglio con i razionali.

Per la retta con più punti individuati da ogni singolo modo di approssimare sempre meglio mediante razionali si dovranno inventare anche numeri in corrispondenza di tali punti.

Chiameremo infinitesimi i numeri inventati infinitamente vicini a zero.

La stessa esigenza di avere una biiettività tra i punti della retta e un sistema di numeri ha portano a inventare i numeri reali come pure gli iperreali con gli infinitesimi, alternative che dipendono della visione di retta accettata.

Dicendo che le cose inventate sono numeri s’intende che devono avere tutte le proprietà dei numeri: si devono poter addizionare e si devono poter ripetere le operazioni.

Non basta inventare gli infinitesimi, ma bisogna dire quali: l'introduzione degli infinitesimi iperrazionali non soddisfa l'esigenza di continuità.

Per soddisfare questa esigenza, reali e iperreali devono avere le stesse proprietà esprimibili in un linguaggio che ha un nome per ciascun modo di indicare un ostacolo alla continuità dei razionali.

L'archimedeità non è esprimibile mediante il linguaggio dei reali perché in esso non lo è l'insieme dei numeri naturali.

Per distinguere reali da iperreali ci vuole un linguaggio più ricco di quello dei reali.

Gli infinitesimi sono trascurabili, sicché quello che conta sono le classi di equivalenza di infinitamente vicini tra gli iperreali finiti.

Per esse è conveniente scegliere un rappresentante che può essere pensato come numero reale. Così i reali possono essere visti come particolari iperreali.

Quanto inventato è forse contradditorio?

No, se se ne riesce a costruire un modello usando elementi di un mondo accettato come non contradditorio.

Così per far vedere la plausibilità del sistema di numeri reali si possono considerare le sezioni di Dedekind sui razionali e dotarle di operazioni.

Alternativamente si può dotare di operazioni il sistema delle classi di equivalenza di successioni di Cauchy.

Queste costruzioni richiedono l'accettazione del sistema dei numeri razionali e dell'infinito attuale della teoria cantoriana degli insiemi.

Né le sezioni di Dedekind né le classi di equivalenza di successioni di Cauchy sono numeri reali.

Per ottenere i reali bisogna inventare gli elementi separatori delle sezioni o gli elementi cui convergono le classi.

Comunque l'isomorfismo con le strutture costruite garantisce la consistenza relativa.

Numeri reali, iperreali, infinitesimi infiniti, da INVENTARE o da COSTRUIRE?

Si può assumere che i reali siano solo quelli inventati per completare le costruzioni. Così la nozione di numero reale viene definitivamente limitata e precisata.

L'invenzione dei reali non porta a contraddizioni, ma cosa dire degli iperreali?

Anche per tale tipo di numeri se ne possono costruire modelli seguendo due vie, una si basa su risultati della logica, l'altra vuole essere più diretta.

Per garantire la continuità, si parte dalle sezioni di Dedekind (o dalle classi di equivalenza di successioni di Cauchy), ma è più comodo partire dal sistema dei reali che è isomorfo a tali strutture.

Nell'approccio logico si impone mediante affermazioni che ci sia almeno un elemento maggiore di tutti i reali e si ottiene una teoria che deve avere modello, che sarà anche un modello degli iperreali.

Con questo approccio la costruzione viene nascosta perché è già stata fatta nell'ottenere i risultati della logica.

Altrimenti si può ricorrere alla costruzione di un ultraprodotto sui reali: si considerano successioni numerabili di reali e la relazione di equivalenza tra queste quando sono quasi sempre uguali (la nozione di quasi sempre è determinata da un ultrafiltro sui naturali), le classi di equivalenza saranno gli iperreali.

Numeri reali, iperreali, infinitesimi infiniti, da INVENTARE o da COSTRUIRE?

La costruzione realizzata non è effettiva perché utilizza un principio che afferma che ci deve essere qualcosa (l'ultrafiltro) senza avere la minima idea di quale essa sia.

Questa difficoltà è del tutto consona alle nozioni inventate: non è possibile distinguere tra loro infinitesimi poiché nessun razionale li separa.

D'altra parte non interessa considerare uno specifico infinitesimo, ma si vuole che certe proprietà valgano per tutti gli infinitesimi.

Ho sviluppato le considerazioni finora esposte per sostenere che ritengo opportuno che reali, iperreali e infinitesimi vengano presentati nelle scuole come enti inventati per affrontare le difficoltà della continuità che i razionali non riescono a soddisfare.

Anche per introdurre i reali, non ritengo sia opportuno sviluppare la costruzione di un loro modello, ma piuttosto presentare la loro assiomatizzazione per poter operare su di essi in modo giustificato.

Numeri reali, iperreali, infinitesimi infiniti, da INVENTARE o da COSTRUIRE?

Analogamente per infinitesimi e iperreali con i loro assiomi come invenzioni che rispondono ai problemi di continuità e di tassi di variazione istantanea.

Un'introduzione dei numeri dei tipi considerati costruendoli è inutilmente pesante.

Basta dire che possono essere modellati da opportune costruzioni che utilizzano strumenti presi in ambienti più immediati e supposti non contraddittori.

Numeri reali, iperreali, infinitesimi infiniti, da INVENTARE o da COSTRUIRE?

Per i problemi dalla realtà si possono auspicare risposte ottenute con costruzioni esplicite. Ma pure trascurando il trascurabile si può arrivare a risposte precise, anche avendo utilizzato strumenti opportunamente inventati.

Quanto inventato non è conosciuto totalmente, ma è una peculiarità degli umani essere in grado di gestire utilmente e prendere decisioni in situazioni conosciute solo parzialmente.

Aiutiamo i giovani a sviluppare questa capacità!

Grazie della vostra attenzione.