Aspetti geometrici di alcuni teoremi del calcolo integrale

Roberto Zanasi

30 settembre 2017

https://tinyurl.com/NSA2017

Il teorema fondamentale del calcolo integrale

Data una funzione f continua, si definisce la funzione integrale S:

$$S(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Data una funzione f continua, si definisce la funzione integrale S:

$$S(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Teorema fondamentale del calcolo integrale

Se f è continua, allora $S'(x) = f(x)$.

La dimostrazione standard

$$S'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{S(x + \Delta x) - S(x)}{\Delta x}$$

La dimostrazione standard

$$
\begin{aligned}
S'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{S(x+\Delta x) - S(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\displaystyle\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{\Delta x}
\end{aligned}
$$

La dimostrazione standard

$$
\begin{aligned}
S'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{S(x+\Delta x) - S(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\displaystyle\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^{x} f(t)dt}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\displaystyle\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt}{\Delta x}
\end{aligned}
$$

La dimostrazione standard

$$
\begin{aligned}
S'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{S(x+\Delta x) - S(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\displaystyle\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\displaystyle\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt}{\Delta x}
\end{aligned}
$$

esiste $c \in [x, x+\Delta x]$ tale che $\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = f(c)\Delta x$

La dimostrazione standard

$$
\begin{aligned}
S'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{S(x+\Delta x) - S(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\displaystyle\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^{x} f(t)dt}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\displaystyle\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt}{\Delta x}
\end{aligned}
$$

esiste $c \in [x, x+\Delta x]$ tale che $\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = f(c)\Delta x$

$$
= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c)\Delta x}{\Delta x}
$$

La dimostrazione standard

$$
\begin{aligned}
S'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{S(x+\Delta x) - S(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\displaystyle\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\displaystyle\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt}{\Delta x}
\end{aligned}
$$

esiste $c \in [x, x+\Delta x]$ tale che $\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = f(c)\Delta x$

$$
= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c)\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(c)
$$

La dimostrazione standard

$$
\begin{aligned}
S'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{S(x+\Delta x) - S(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\displaystyle\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\displaystyle\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt}{\Delta x}
\end{aligned}
$$

esiste $c \in [x, x+\Delta x]$ tale che $\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = f(c)\Delta x$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c)\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(c) \\
&= \lim_{c \to x} f(c)
\end{aligned}
$$

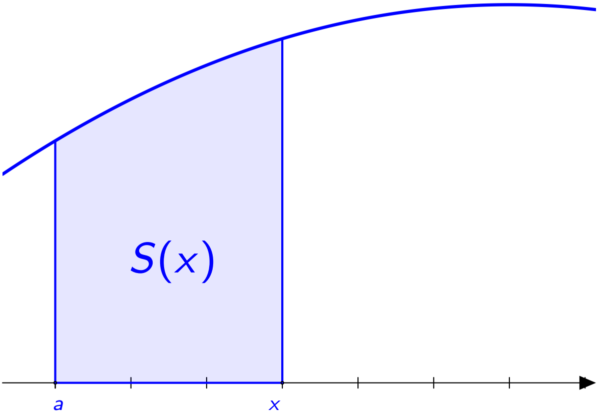
La dimostrazione standard

$$\begin{aligned} S'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{S(x+\Delta x) - S(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\displaystyle\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\displaystyle\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt}{\Delta x} \end{aligned}$$

esiste $c \in [x, x+\Delta x]$ tale che $\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = f(c)\Delta x$

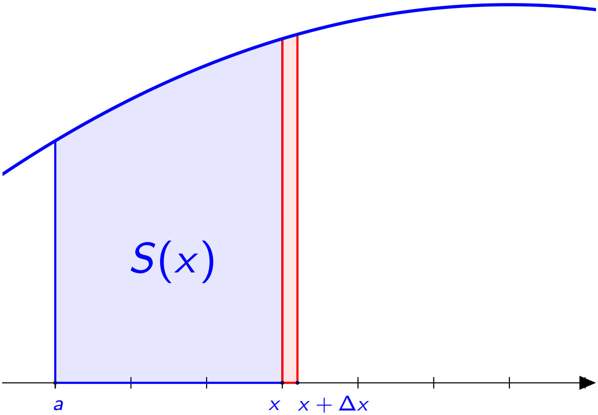
$$\begin{aligned} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c)\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(c) \\ &= \lim_{c \to x} f(c) = f(x). \end{aligned}$$

A cosa serve il teorema della media?



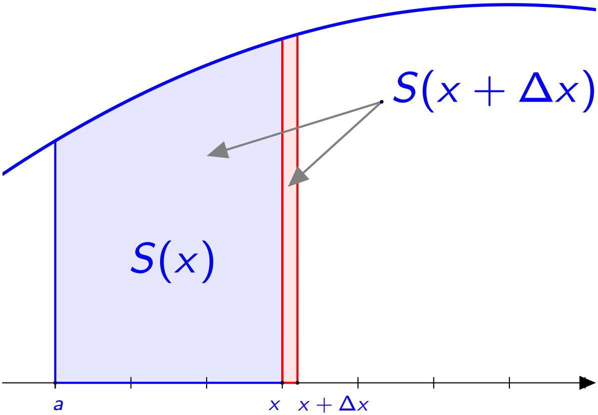
Trasforma l'area sottesa dalla curva nell'area di un rettangolo

A cosa serve il teorema della media?



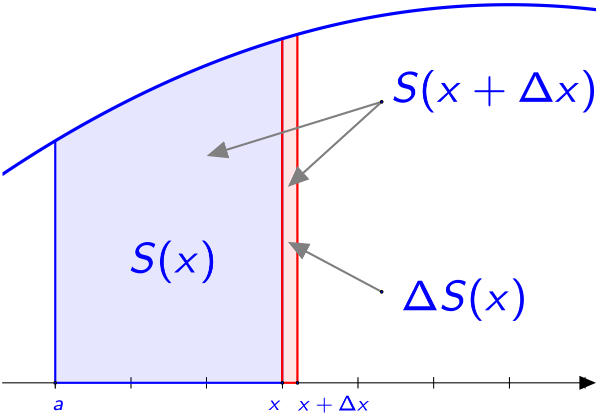
Trasforma l'area sottesa dalla curva nell'area di un rettangolo

A cosa serve il teorema della media?



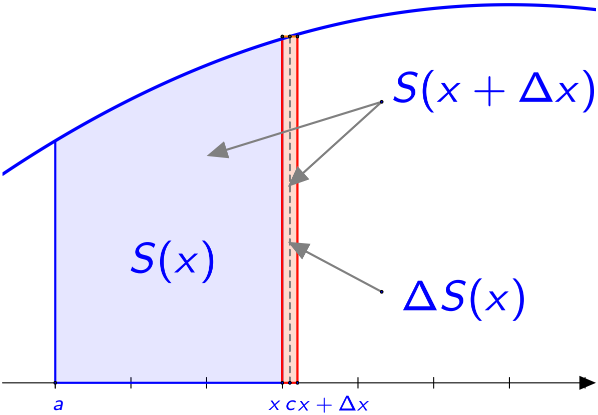
Trasforma l'area sottesa dalla curva nell'area di un rettangolo

A cosa serve il teorema della media?



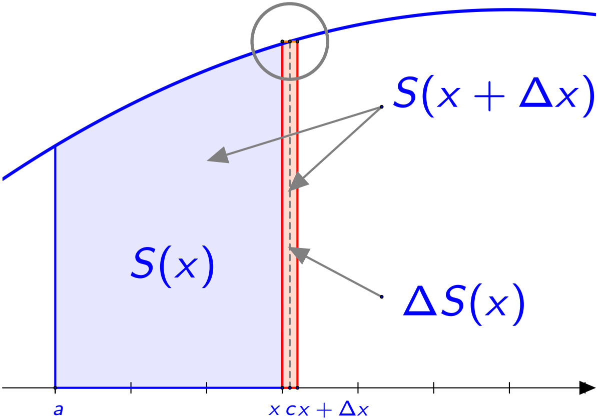
Trasforma l'area sottesa dalla curva nell'area di un rettangolo

A cosa serve il teorema della media?



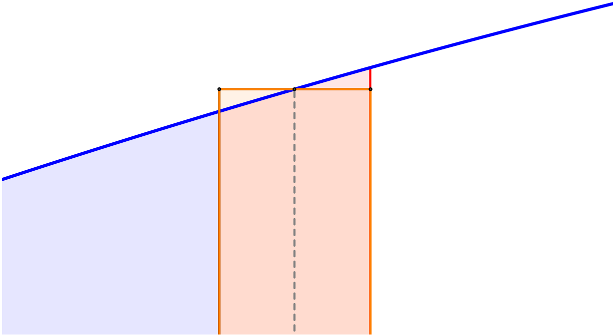
Trasforma l'area sottesa dalla curva nell'area di un rettangolo

A cosa serve il teorema della media?

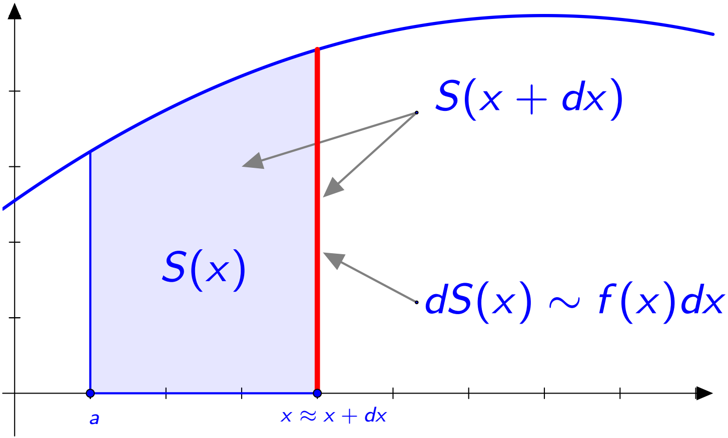


Trasforma l'area sottesa dalla curva nell'area di un rettangolo

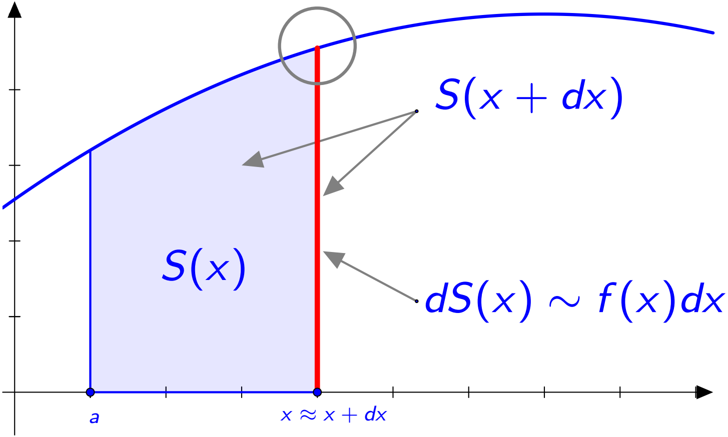
A cosa serve il teorema della media?

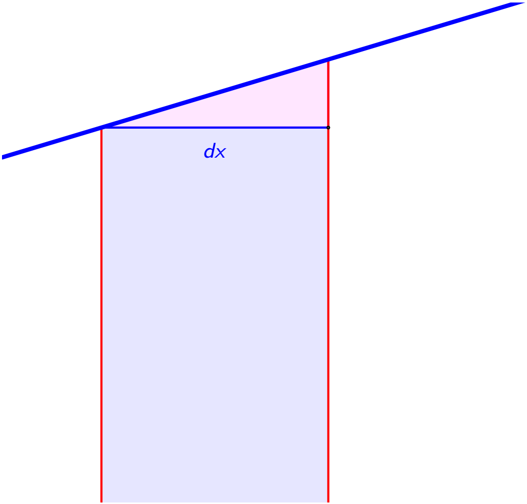


$$\int_{x}^{x+\Delta x} f(t)dt = f(c)\Delta x$$


$S(x + dx)$
$S(x)$
$dS(x) \sim f(x)dx$
a
$x \approx x + dx$

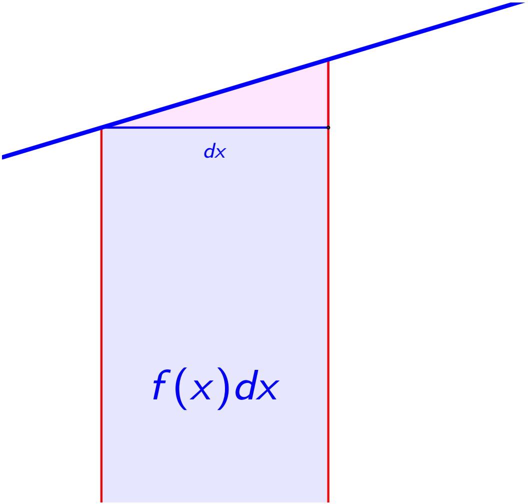
Cosa dice l'analisi non standard



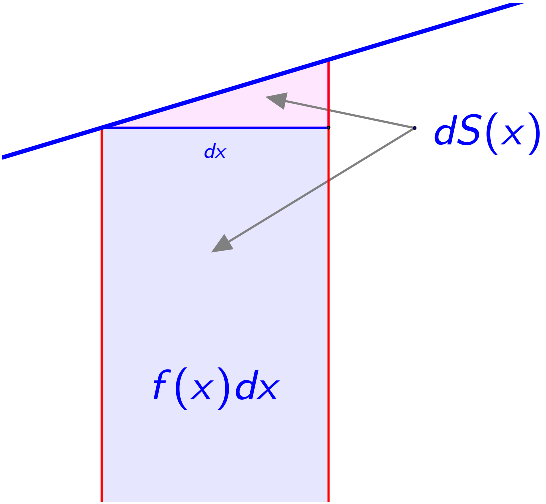


In una scala in cui è visibile dx la curva e la retta tangente sono indistinguibili

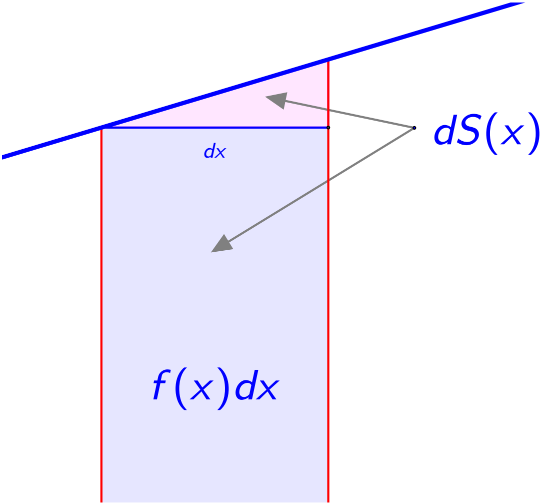
Cosa dice l'analisi non standard



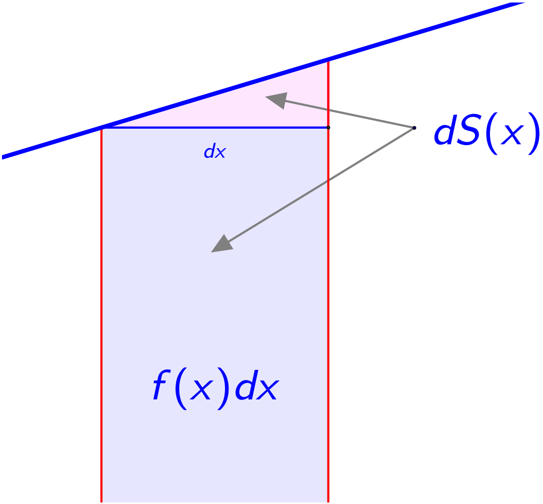
In una scala in cui è visibile dx la curva e la retta tangente sono indistinguibili



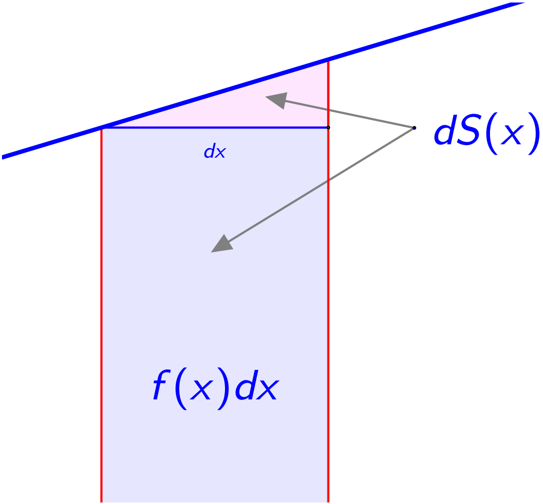
Quindi $dS(x)$ è indistinguibile dall'area di un trapezio



Il trapezio differisce dal rettangolo per un triangolo

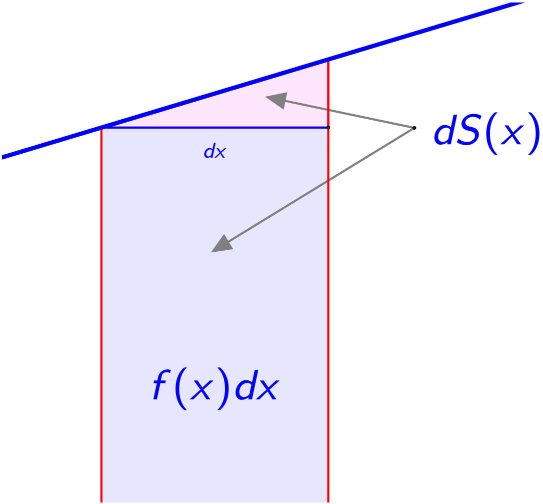


Il triangolo ha due lati di lunghezza infinitesima, il rettangolo un lato di lunghezza finita e uno di lunghezza infinitesima

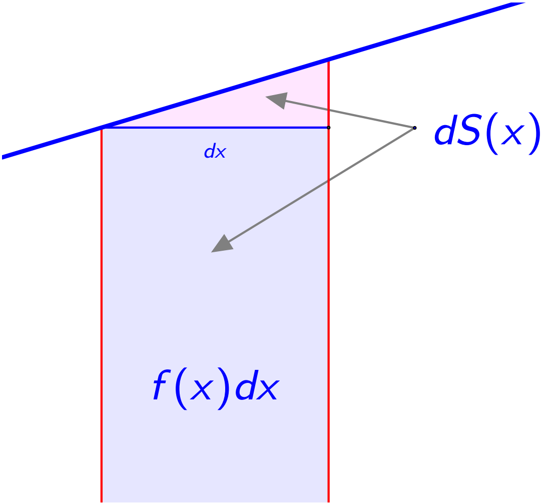


Quindi l'area del rettangolo differisce dall'area del trapezio per un infinitesimo di ordine superiore

Cosa dice l'analisi non standard



$dS(x) \sim f(x)dx$



$$dS(x) \sim f(x)dx \Longrightarrow \frac{dS(x)}{dx} \approx f(x)$$

Come si comportano gli indistinguibili nell'integrazione?

- Se α_k e β_k sono infinitesimi indistinguibili, è vero che $\displaystyle\int_0^M \alpha_k$ è indistinguibile da $\displaystyle\int_0^M \beta_k$?

Come si comportano gli indistinguibili nell'integrazione?

- Se α_k e β_k sono infinitesimi indistinguibili, è vero che $\displaystyle\int_0^M \alpha_k$ è indistinguibile da $\displaystyle\int_0^M \beta_k$?
- Studiamo il caso in cui α_k e β_k sono indistinguibili positivi.

Come si comportano gli indistinguibili nell'integrazione?

- Se α_k e β_k sono infinitesimi indistinguibili, è vero che $\displaystyle\int_0^M \alpha_k$ è indistinguibile da $\displaystyle\int_0^M \beta_k$?
- Studiamo il caso in cui α_k e β_k sono indistinguibili positivi.
- Per definizione, $\dfrac{\beta_k}{\alpha_k}$ è infinitamente vicino a 1.

- Se α_k e β_k sono infinitesimi indistinguibili, è vero che $\int_0^M \alpha_k$ è indistinguibile da $\int_0^M \beta_k$?
- Studiamo il caso in cui α_k e β_k sono indistinguibili positivi.
- Per definizione, $\dfrac{\beta_k}{\alpha_k}$ è infinitamente vicino a 1.
- Quindi $\left(1 - \dfrac{\beta_k}{\alpha_k}\right)$ è un infinitesimo.

Come si comportano gli indistinguibili nell'integrazione?

- Se α_k e β_k sono infinitesimi indistinguibili, è vero che $\int_0^M \alpha_k$ è indistinguibile da $\int_0^M \beta_k$?
- Studiamo il caso in cui α_k e β_k sono indistinguibili positivi.
- Per definizione, $\dfrac{\beta_k}{\alpha_k}$ è infinitamente vicino a 1.
- Quindi $\left(1 - \dfrac{\beta_k}{\alpha_k}\right)$ è un infinitesimo.
- Quindi per ogni reale positivo s si ha

$$-s < 1 - \frac{\beta_k}{\alpha_k} < s.$$

- Per ogni reale positivo s si ha

$$-s < 1 - \frac{\beta_k}{\alpha_k} < s.$$

Come si comportano gli indistinguibili nell'integrazione?

- Per ogni reale positivo s si ha

$$-s < 1 - \frac{\beta_k}{\alpha_k} < s.$$

- Moltiplicando per α_k si ottiene

$$-s\alpha_k < \alpha_k \left(1 - \frac{\beta_k}{\alpha_k}\right) < s\alpha_k.$$

Come si comportano gli indistinguibili nell'integrazione?

- Per ogni reale positivo s si ha

$$-s < 1 - \frac{\beta_k}{\alpha_k} < s.$$

- Moltiplicando per α_k si ottiene

$$-s\alpha_k < \alpha_k \left(1 - \frac{\beta_k}{\alpha_k}\right) < s\alpha_k.$$

- Sommando tutti i termini

$$-s \int_0^M \alpha_k < \int_0^M \alpha_k \left(1 - \frac{\beta_k}{\alpha_k}\right) < s \int_0^M \alpha_k.$$

Come si comportano gli indistinguibili nell'integrazione?

- Partendo dalla disuguaglianza

$$-s\int_0^M \alpha_k < \int_0^M \alpha_k\left(1-\frac{\beta_k}{\alpha_k}\right) < s\int_0^M \alpha_k,$$

- Partendo dalla disuguaglianza

$$-s\int_0^M \alpha_k < \int_0^M \alpha_k\left(1-\frac{\beta_k}{\alpha_k}\right) < s\int_0^M \alpha_k,$$

- e dividendo per $\displaystyle\int_0^M \alpha_k$ si ottiene

$$-s < \frac{\displaystyle\int_0^M \alpha_k\left(1-\frac{\beta_k}{\alpha_k}\right)}{\displaystyle\int_0^M \alpha_k} < s,$$

Come si comportano gli indistinguibili nell'integrazione?

- Partendo dalla disuguaglianza

$$-s\int_0^M \alpha_k < \int_0^M \alpha_k\left(1-\frac{\beta_k}{\alpha_k}\right) < s\int_0^M \alpha_k,$$

- e dividendo per $\displaystyle\int_0^M \alpha_k$ si ottiene

$$-s < \frac{\displaystyle\int_0^M \alpha_k\left(1-\frac{\beta_k}{\alpha_k}\right)}{\displaystyle\int_0^M \alpha_k} < s,$$

- cioè

$$-s < \frac{\displaystyle\int_0^M (\alpha_k-\beta_k)}{\displaystyle\int_0^M \alpha_k} < s.$$

Il che significa che

$$\frac{\int_0^M (\alpha_k - \beta_k)}{\int_0^M \alpha_k}$$

è un infinitesimo.

Il che significa che

$$\frac{\int_0^M (\alpha_k - \beta_k)}{\int_0^M \alpha_k} = \frac{\int_0^M \alpha_k - \int_0^M \beta_k}{\int_0^M \alpha_k}$$

è un infinitesimo.

Il che significa che

$$\frac{\displaystyle\int_0^M (\alpha_k - \beta_k)}{\displaystyle\int_0^M \alpha_k} = \frac{\displaystyle\int_0^M \alpha_k - \int_0^M \beta_k}{\displaystyle\int_0^M \alpha_k} = 1 - \frac{\displaystyle\int_0^M \beta_k}{\displaystyle\int_0^M \alpha_k}$$

è un infinitesimo.

Come si comportano gli indistinguibili nell'integrazione?

Il che significa che

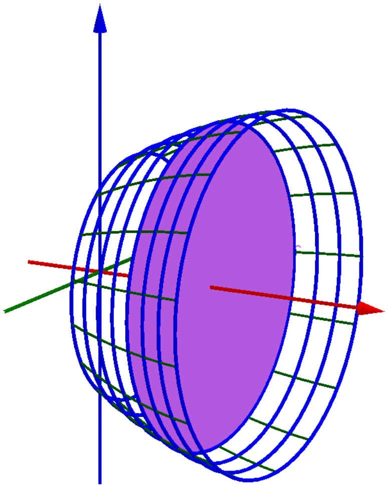
$$\frac{\displaystyle\int_0^M (\alpha_k - \beta_k)}{\displaystyle\int_0^M \alpha_k} = \frac{\displaystyle\int_0^M \alpha_k - \int_0^M \beta_k}{\displaystyle\int_0^M \alpha_k} = 1 - \frac{\displaystyle\int_0^M \beta_k}{\displaystyle\int_0^M \alpha_k}$$

è un infinitesimo.

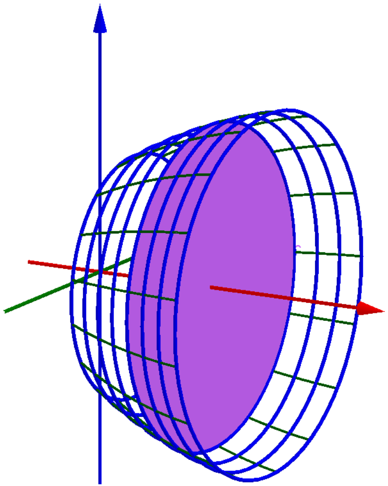
Conclusione:

Teorema

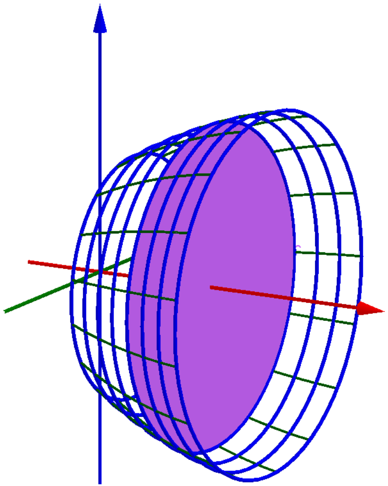
Se α_k e β_k sono infinitesimi indistinguibili, allora $\displaystyle\int_0^M \alpha_k$ e $\displaystyle\int_0^M \beta_k$ sono indistinguibili.



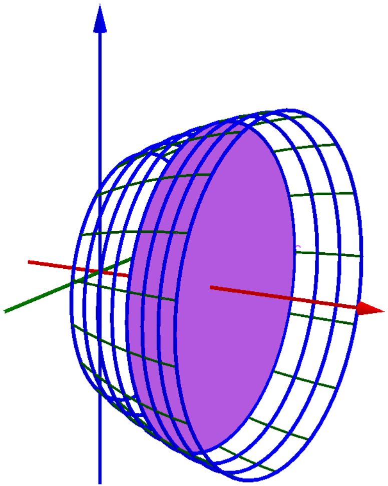
- La figura evidenziata è indistinguibile da un tronco di cono di altezza infinitesima,



- La figura evidenziata è indistinguibile da un tronco di cono di altezza infinitesima,
- che, a sua volta, è indistinguibile da un cilindro di altezza infinitesima,



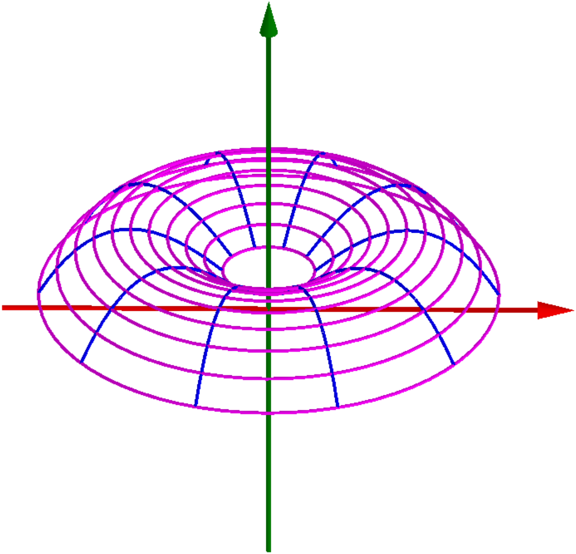
- La figura evidenziata è indistinguibile da un tronco di cono di altezza infinitesima,
- che, a sua volta, è indistinguibile da un cilindro di altezza infinitesima,
- il cui volume è $\pi f^2(x)dx$.

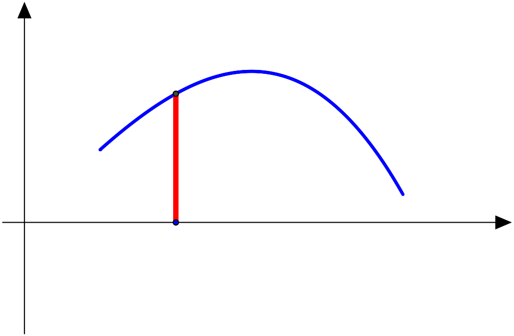


- La figura evidenziata è indistinguibile da un tronco di cono di altezza infinitesima,
- che, a sua volta, è indistinguibile da un cilindro di altezza infinitesima,
- il cui volume è $\pi f^2(x)dx$.
- Quindi il volume totale è

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx.$$

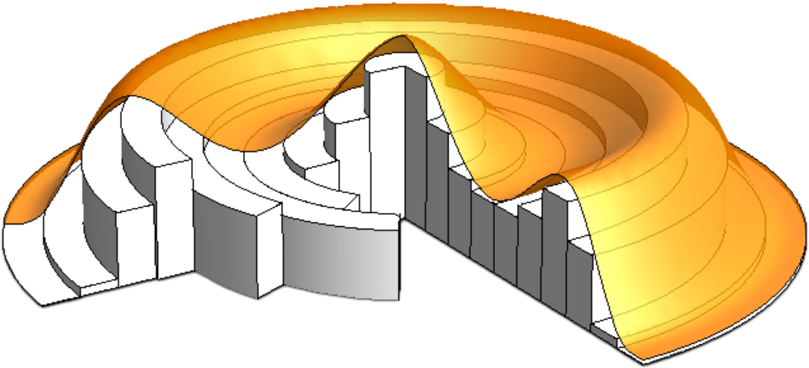
Il volume di un solido di rotazione intorno all'asse y





Wikipedia: "Somma delle superfici laterali dei cilindri di asse y". In realtà sono volumi.

Il volume di un solido di rotazione intorno all'asse y



(Immagine di Blacklemon67 presente su Wikipedia inglese)

Il volume di un solido di rotazione intorno all'asse y

- Volume “esterno”: $\pi(x + dx)^2 f(x)$

Il volume di un solido di rotazione intorno all'asse y

- Volume "esterno": $\pi(x + dx)^2 f(x)$
- Volume "interno": $\pi x^2 f(x)$

Il volume di un solido di rotazione intorno all'asse y

- Volume "esterno": $\pi(x+dx)^2 f(x)$
- Volume "interno": $\pi x^2 f(x)$
- Differenza, cioè volume del guscio cilindrico:

$$\pi(x+dx)^2 f(x) - \pi x^2 f(x) =$$

Il volume di un solido di rotazione intorno all'asse y

- Volume "esterno": $\pi(x+dx)^2 f(x)$
- Volume "interno": $\pi x^2 f(x)$
- Differenza, cioè volume del guscio cilindrico:

$$\pi(x+dx)^2 f(x) - \pi x^2 f(x) = \pi f(x)[x^2 + 2x dx + (dx)^2 - x^2]$$

Il volume di un solido di rotazione intorno all'asse y

- Volume "esterno": $\pi(x+dx)^2 f(x)$
- Volume "interno": $\pi x^2 f(x)$
- Differenza, cioè volume del guscio cilindrico:

$$\begin{aligned}\pi(x+dx)^2 f(x) - \pi x^2 f(x) &= \pi f(x)[x^2 + 2xdx + (dx)^2 - x^2] \\ &= \pi f(x)[2xdx + (dx)^2]\end{aligned}$$

- Volume "esterno": $\pi(x+dx)^2 f(x)$
- Volume "interno": $\pi x^2 f(x)$
- Differenza, cioè volume del guscio cilindrico:

$$\begin{aligned}\pi(x+dx)^2 f(x) - \pi x^2 f(x) &= \pi f(x)[x^2 + 2xdx + (dx)^2 - x^2] \\ &= \pi f(x)[2xdx + (dx)^2] \\ &\sim 2\pi x f(x) dx.\end{aligned}$$

Il volume di un solido di rotazione intorno all'asse y

- Volume "esterno": $\pi(x+dx)^2 f(x)$
- Volume "interno": $\pi x^2 f(x)$
- Differenza, cioè volume del guscio cilindrico:

$$\begin{aligned}\pi(x+dx)^2 f(x) - \pi x^2 f(x) &= \pi f(x)[x^2 + 2xdx + (dx)^2 - x^2] \\ &= \pi f(x)[2xdx + (dx)^2] \\ &\sim 2\pi x f(x)dx.\end{aligned}$$

- Volume totale (somma di tutti i volumi):

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx.$$

La superficie della sfera qual è?

- Perché la formula per il calcolo della superficie sferica è la derivata della formula per il calcolo del volume?

La superficie della sfera qual è?

- Perché la formula per il calcolo della superficie sferica è la derivata della formula per il calcolo del volume?
- O, anche, perché la formula per il calcolo del volume di una sfera è l'integrale di quella per il calcolo della superficie?

La superficie della sfera qual è?

- Perché la formula per il calcolo della superficie sferica è la derivata della formula per il calcolo del volume?
- O, anche, perché la formula per il calcolo del volume di una sfera è l'integrale di quella per il calcolo della superficie?
- Il volume della sfera si può ottenere sommando tanti gusci sferici di spessore infinitesimo dr.

La superficie della sfera qual è?

- Perché la formula per il calcolo della superficie sferica è la derivata della formula per il calcolo del volume?
- O, anche, perché la formula per il calcolo del volume di una sfera è l'integrale di quella per il calcolo della superficie?
- Il volume della sfera si può ottenere sommando tanti gusci sferici di spessore infinitesimo dr.
- Volume "esterno": $\dfrac{4}{3}\pi(r+dr)^3$

La superficie della sfera qual è?

- Perché la formula per il calcolo della superficie sferica è la derivata della formula per il calcolo del volume?
- O, anche, perché la formula per il calcolo del volume di una sfera è l'integrale di quella per il calcolo della superficie?
- Il volume della sfera si può ottenere sommando tanti gusci sferici di spessore infinitesimo dr.
- Volume "esterno": $\dfrac{4}{3}\pi(r+dr)^3$
- Volume "interno": $\dfrac{4}{3}\pi r^3$

La superficie della sfera qual è?

- Differenza tra volume esterno e interno, cioè volume del guscio sferico:

$$\frac{4}{3}\pi(r+dr)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3 =$$

La superficie della sfera qual è?

- Differenza tra volume esterno e interno, cioè volume del guscio sferico:

$$\frac{4}{3}\pi(r+dr)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi(r^3 + 3r^2 dr + 3r(dr)^2 + (dr)^3 - r^3)$$

La superficie della sfera qual è?

- Differenza tra volume esterno e interno, cioè volume del guscio sferico:

$$\frac{4}{3}\pi(r+dr)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi(r^3 + 3r^2dr + 3r(dr)^2 + (dr)^3 - r^3)$$
$$\sim \frac{4}{3}\pi \cdot 3r^2dr$$

La superficie della sfera qual è?

- Differenza tra volume esterno e interno, cioè volume del guscio sferico:

$$
\begin{aligned}
\frac{4}{3}\pi(r+dr)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3 &= \frac{4}{3}\pi(r^3 + 3r^2dr + 3r(dr)^2 + (dr)^3 - r^3) \\
&\sim \frac{4}{3}\pi \cdot 3r^2dr \\
&= 4\pi r^2 dr.
\end{aligned}
$$

La superficie della sfera qual è?

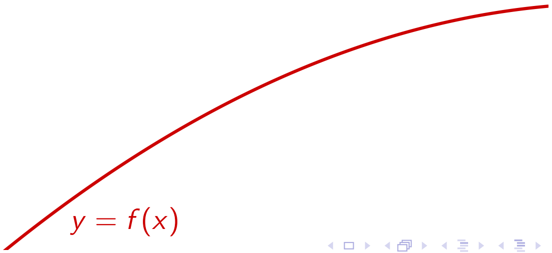
- Differenza tra volume esterno e interno, cioè volume del guscio sferico:

$$
\begin{aligned}
\frac{4}{3}\pi(r+dr)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3 &= \frac{4}{3}\pi(r^3 + 3r^2dr + 3r(dr)^2 + (dr)^3 - r^3) \\
&\sim \frac{4}{3}\pi \cdot 3r^2dr \\
&= 4\pi r^2 dr.
\end{aligned}
$$

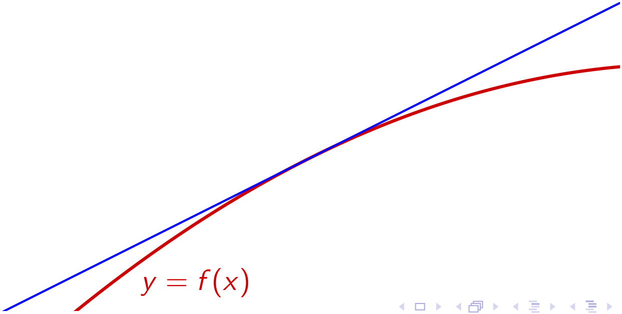
- Quindi il volume della sfera si può trovare sommando tutti i volumi infinitesimi:

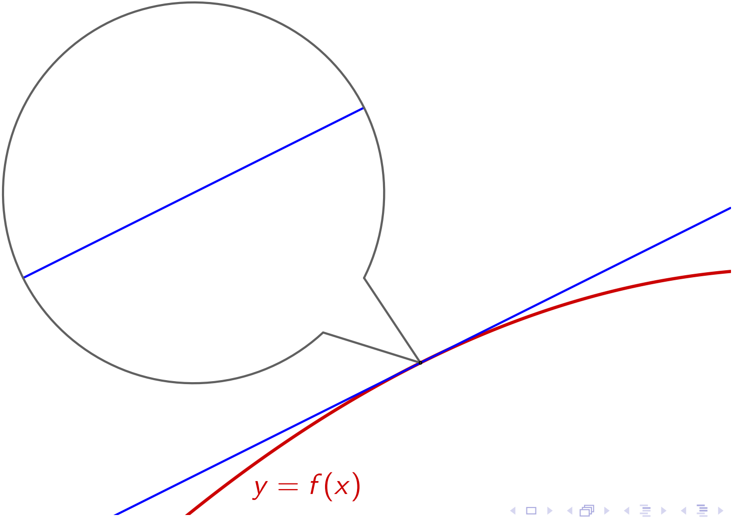
$$V = \int_0^r 4\pi r^2 dr.$$

La lunghezza di una curva

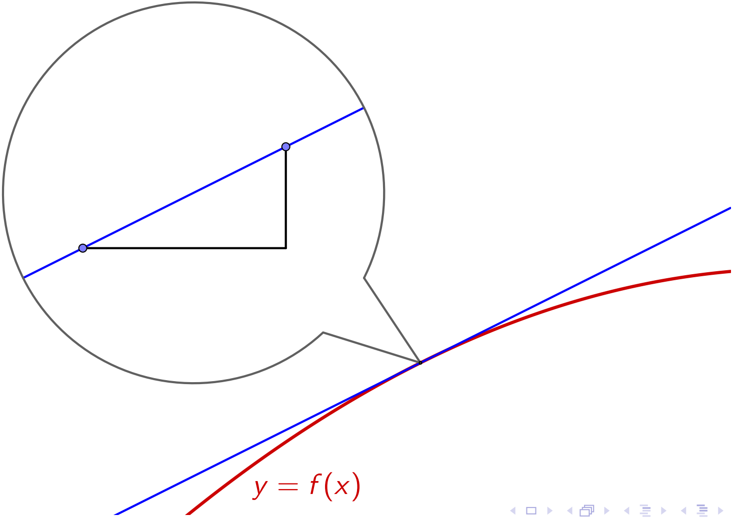


La lunghezza di una curva

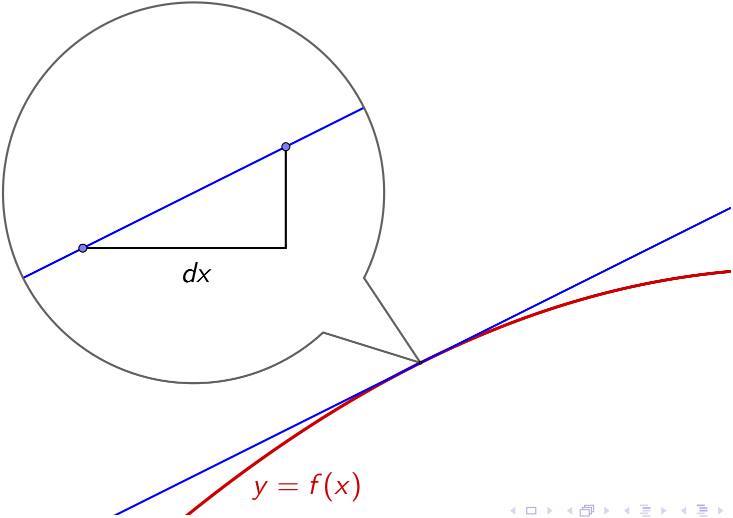



$y = f(x)$

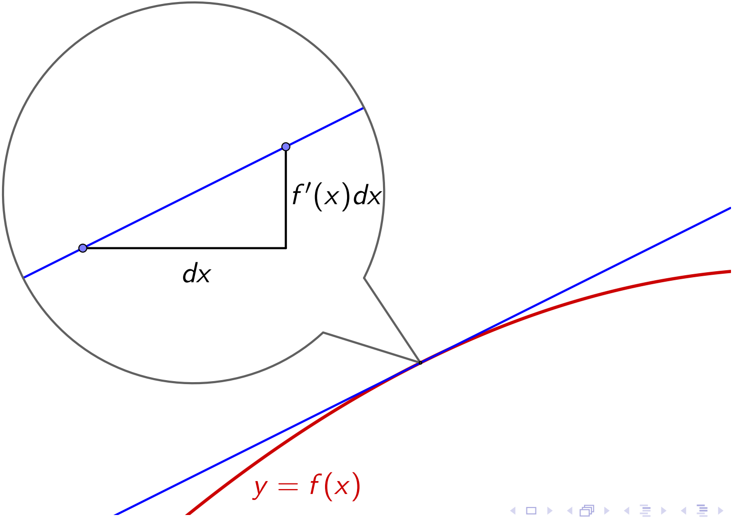
La lunghezza di una curva



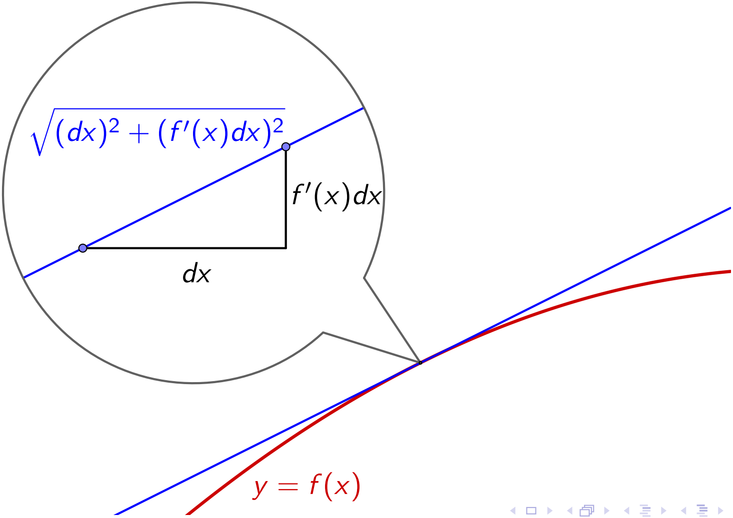
La lunghezza di una curva



La lunghezza di una curva



Teorema di Pitagora



La lunghezza di una curva

Lunghezza di ogni segmento infinitesimo:

$$\sqrt{(dx)^2 + (f'(x)dx)^2}$$

La lunghezza di una curva

Lunghezza di ogni segmento infinitesimo:

$$\sqrt{(dx)^2 + (f'(x)dx)^2} = \sqrt{(1 + (f'(x))^2)(dx)^2}$$

Lunghezza di ogni segmento infinitesimo:

$$\sqrt{(dx)^2 + (f'(x)dx)^2} = \sqrt{(1 + (f'(x))^2)(dx)^2} = \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx.$$

La lunghezza di una curva

Lunghezza di ogni segmento infinitesimo:

$$\sqrt{(dx)^2 + (f'(x)dx)^2} = \sqrt{(1 + (f'(x))^2)(dx)^2} = \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx.$$

Lunghezza dell'arco di curva:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx.$$

Grazie

https://tinyurl.com/NSA2017