Un percorso di calcolo infinitesimale nella scuola

VII giornata di analisi non standard

Daniele Zambelli

Liceo Scientifico Girolamo Fracastoro

2017

Piano della presentazione I

Un percorso sensato

1. Insiemi numerici
2. Funzioni razionali
3. Funzioni trascendenti
4. Derivate
5. Continuità
6. Integrali
7. Limiti
8. Conclusioni

Un percorso sensato

1. Insiemi numerici
2. Funzioni razionali
3. Funzioni trascendenti
4. Derivate
5. Continuità
6. Integrali
7. Limiti
8. Conclusioni

Un percorso sensato

1. Insiemi numerici
2. Funzioni razionali
3. Funzioni trascendenti
4. Derivate
5. Continuità
6. Integrali
7. Limiti
8. Conclusioni

Un percorso sensato

1. Insiemi numerici
2. Funzioni razionali
3. Funzioni trascendenti
4. Derivate
5. Continuità
6. Integrali
7. Limiti
8. Conclusioni

Un percorso sensato

1. Insiemi numerici
2. Funzioni razionali
3. Funzioni trascendenti
4. Derivate
5. Continuità
6. Integrali
7. Limiti
8. Conclusioni

Un percorso sensato

1. Insiemi numerici
2. Funzioni razionali
3. Funzioni trascendenti
4. Derivate
5. Continuità
6. Integrali
7. Limiti
8. Conclusioni

Un percorso sensato

1. Insiemi numerici
2. Funzioni razionali
3. Funzioni trascendenti
4. Derivate
5. Continuità
6. Integrali
7. Limiti
8. Conclusioni

Un percorso sensato

1. Insiemi numerici
2. Funzioni razionali
3. Funzioni trascendenti
4. Derivate
5. Continuità
6. Integrali
7. Limiti
8. Conclusioni

Insiemi numerici

Gli *Iperreali*

- precisare che in questo insieme non è valido l'assioma di Eudosso-Archimede;
- capire bene la differenza tra numero *standard* e numero *finito*.
- abituarsi a un modo diverso dal solito per confrontare due numeri: invece della differenza qui è vantaggioso usare il rapporto;
- capire bene la differenza tra essere infinitamente vicini e essere indistinguibili;
- abituarsi a nuovi simboli e nuove convenzioni;
- imparare la nuova funzione parte standard, ovviamente non presente nei numeri Reali.

Insiemi numerici

Gli *Iperreali*

- precisare che in questo insieme non è valido l'assioma di Eudosso-Archimede;
- capire bene la differenza tra numero *standard* e numero *finito*.
- abituarsi a un modo diverso dal solito per confrontare due numeri: invece della differenza qui è vantaggioso usare il rapporto.
- capire bene la differenza tra essere infinitamente vicini e essere indistinguibili;
- abituarsi a nuovi simboli e nuove convenzioni;
- imparare la nuova funzione *parte standard*, ovviamente non presente nei numeri Reali.

Insiemi numerici

Gli *Iperreali*

- precisare che in questo insieme non è valido l'assioma di Eudosso-Archimede;
- capire bene la differenza tra numero *standard* e numero *finito*.
- abituarsi a un modo diverso dal solito per confrontare due numeri: invece della differenza qui è vantaggioso usare il rapporto.
- capire bene la differenza tra essere infinitamente vicini e essere indistinguibili;
- abituarsi a nuovi simboli e nuove convenzioni;
- imparare la nuova funzione *parte standard*, ovviamente non presente nei numeri Reali.

Insiemi numerici

Gli *Iperreali*

- precisare che in questo insieme non è valido l'assioma di Eudosso-Archimede;
- capire bene la differenza tra numero *standard* e numero *finito*.
- abituarsi a un modo diverso dal solito per confrontare due numeri: invece della differenza qui è vantaggioso usare il rapporto.
- capire bene la differenza tra essere infinitamente vicini e essere indistinguibili;
- abituarsi a nuovi simboli e nuove convenzioni;
- imparare la nuova funzione *parte standard*, ovviamente non presente nei numeri Reali.

Insiemi numerici

Gli *Iperreali*

- precisare che in questo insieme non è valido l'assioma di Eudosso-Archimede;
- capire bene la differenza tra numero *standard* e numero *finito*.
- abituarsi a un modo diverso dal solito per confrontare due numeri: invece della differenza qui è vantaggioso usare il rapporto.
- capire bene la differenza tra essere infinitamente vicini e essere indistinguibili;
- abituarsi a nuovi simboli e nuove convenzioni;
- imparare la nuova funzione *parte standard*, ovviamente non presente nei numeri Reali.

Insiemi numerici

Gli *Iperreali*

- precisare che in questo insieme non è valido l'assioma di Eudosso-Archimede;
- capire bene la differenza tra numero *standard* e numero *finito*.
- abituarsi a un modo diverso dal solito per confrontare due numeri: invece della differenza qui è vantaggioso usare il rapporto.
- capire bene la differenza tra essere infinitamente vicini e essere indistinguibili;
- abituarsi a nuovi simboli e nuove convenzioni;
- imparare la nuova funzione *parte standard*, ovviamente non presente nei numeri Reali.

Gli *Iperreali*

- precisare che in questo insieme non è valido l'assioma di Eudosso-Archimede;
- capire bene la differenza tra numero *standard* e numero *finito*.
- abituarsi a un modo diverso dal solito per confrontare due numeri: invece della differenza qui è vantaggioso usare il rapporto.
- capire bene la differenza tra essere infinitamente vicini e essere indistinguibili;
- abituarsi a nuovi simboli e nuove convenzioni;
- imparare la nuova funzione *parte standard*, ovviamente non presente nei numeri Reali.

Insiemi numerici

L'aggiunta di questi nuovi numeri ha un costo in termini di tempo dedicato, ma offre in cambio la possibilità di lavorare e capire il calcolo infinitesimale già in seconda o terza.

Funzioni razionali

Calcolare il risultato di questa espressione negli Iperreali è abbastanza semplice:

$$\frac{\varepsilon^2 + 3\varepsilon - 4}{5\varepsilon + 7}$$

- Semplificare: $\dfrac{\delta - 4}{\delta + 7}$
- Calcolare la parte standard: $-\dfrac{4}{7}$

Funzioni razionali

Calcolare il risultato di questa espressione negli Iperreali è abbastanza semplice:

$$\frac{\varepsilon^2 + 3\varepsilon - 4}{5\varepsilon + 7}$$

- Semplificare: $\frac{\delta - 4}{\delta + 7}$
- Calcolare la parte standard:

Funzioni razionali

Calcolare il risultato di questa espressione negli Iperreali è abbastanza semplice:

$$\frac{\varepsilon^2 + 3\varepsilon - 4}{5\varepsilon + 7}$$

- Semplificare: $\frac{\delta - 4}{\delta + 7}$
- Calcolare la parte standard:

Funzioni razionali

Calcolare il risultato di questa espressione negli Iperreali è abbastanza semplice:

$$\frac{\varepsilon^2 + 3\varepsilon - 4}{5\varepsilon + 7}$$

- Semplificare: $\dfrac{\delta - 4}{\delta + 7}$
- Calcolare la parte standard: $-\dfrac{4}{7}$

Funzioni razionali

Calcolare il risultato di questa espressione negli Iperreali è abbastanza semplice:

$$\frac{\varepsilon^2 + 3\varepsilon - 4}{5\varepsilon + 7}$$

- Semplificare: $\dfrac{\delta - 4}{\delta + 7}$
- Calcolare la parte standard: $-\dfrac{4}{7}$

Funzioni razionali

Calcolare il risultato di questa espressione negli Iperreali è abbastanza semplice:

$$\frac{\varepsilon^2 + 3\varepsilon - 4}{5\varepsilon + 7}$$

- Semplificare: $\dfrac{\delta - 4}{\delta + 7}$
- Calcolare la parte standard: $-\dfrac{4}{7}$

Funzioni razionali

Ma quanto fatto corrisponde a risolvere:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + 3x - 4}{5x + 7}$$

Funzioni razionali

E se il limite porta ad una forma di indecisione? Ad esempio:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+3x-10}{x^2-4}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+3x-10}{x^2-4}=\mathrm{st}\left(\frac{(2+\varepsilon)^2+3(2+\varepsilon)-10}{(2+\varepsilon)^2-4}\right)=$$

$$=\mathrm{st}\left(\frac{4+4\varepsilon+\varepsilon^2+6+3\varepsilon-10}{4+4\varepsilon+\varepsilon^2-4}\right)=$$

$$=\mathrm{st}\left(\frac{\varepsilon(\varepsilon+7)}{\varepsilon(\varepsilon+4)}\right)=\mathrm{st}\left(\frac{\varepsilon+7}{\varepsilon+4}\right)=\frac{7}{4}$$

Funzioni razionali

E se il limite porta ad una forma di indecisione? Ad esempio:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 - 4}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 - 4} &= \mathrm{st}\left(\frac{(2+\varepsilon)^2 + 3(2+\varepsilon) - 10}{(2+\varepsilon)^2 - 4}\right) = \\ &= \mathrm{st}\left(\frac{4 + 4\varepsilon + \varepsilon^2 + 6 + 3\varepsilon - 10}{4 + 4\varepsilon + \varepsilon^2 - 4}\right) = \\ &= \mathrm{st}\left(\frac{\varepsilon(\varepsilon + 7)}{\varepsilon(\varepsilon + 4)}\right) = \mathrm{st}\left(\frac{\varepsilon + 7}{\varepsilon + 4}\right) = \frac{7}{4}\end{aligned}$$

Funzioni razionali

Possiamo notare che i nostri alunni, una volta imparato:

- il calcolo algebrico allargato agli infinitesimi e agli infiniti,
- il significato della funzione *parte standard* ...

sono in grado di calcolare le espressioni che nell'analisi chiameremo *limiti*

Funzioni razionali

Possiamo notare che i nostri alunni, una volta imparato:

- il calcolo algebrico allargato agli infinitesimi e agli infiniti,
- il significato della funzione *parte standard* ...

sono in grado di calcolare le espressioni che nell'analisi chiameremo *limiti*

Funzioni trascendenti

Ampliamo i vari argomenti domandandoci come si comportano le nuove funzioni con gli infinitesimi e gli infiniti.

- il seno di un arco *infinito* è *indefinito* poiché la funzione continua ad oscillare tra -1 e $+1$.
- il seno di un arco *infinitesimo* è un *infinitesimo*.

Ma quanto vale questo infinitesimo? Nei testi, a questo proposito, c'è sempre una dimostrazione molto divertente.

Funzioni trascendenti

Ampliamo i vari argomenti domandandoci come si comportano le nuove funzioni con gli infinitesimi e gli infiniti.

- il seno di un arco *infinito* è *indefinito* poiché la funzione continua ad oscillare tra -1 e $+1$.
- il seno di un arco *infinitesimo* è un *infinitesimo*.

Ma quanto vale questo infinitesimo? Nei testi, a questo proposito, c'è sempre una dimostrazione molto divertente.

Funzioni trascendenti

Ampliamo i vari argomenti domandandoci come si comportano le nuove funzioni con gli infinitesimi e gli infiniti.

- il seno di un arco *infinito* è *indefinito* poiché la funzione continua ad oscillare tra -1 e $+1$.
- il seno di un arco *infinitesimo* è un *infinitesimo*.

Ma quanto vale questo infinitesimo? Nei testi, a questo proposito, c'è sempre una dimostrazione molto divertente.

Funzioni trascendenti

Ampliamo i vari argomenti domandandoci come si comportano le nuove funzioni con gli infinitesimi e gli infiniti.

- il seno di un arco *infinito* è *indefinito* poiché la funzione continua ad oscillare tra -1 e $+1$.
- il seno di un arco *infinitesimo* è un *infinitesimo*.

Ma quanto vale questo infinitesimo? Nei testi, a questo proposito, c'è sempre una dimostrazione molto divertente.

Funzioni trascendenti

Ampliamo i vari argomenti domandandoci come si comportano le nuove funzioni con gli infinitesimi e gli infiniti.

- il seno di un arco *infinito* è *indefinito* poiché la funzione continua ad oscillare tra -1 e $+1$.
- il seno di un arco *infinitesimo* è un *infinitesimo*.

Ma quanto vale questo infinitesimo? Nei testi, a questo proposito, c'è sempre una dimostrazione molto divertente.

Funzioni trascendenti

Usando infiniti e infinitesimi, invece, possiamo dare una definizione di circonferenza che ha come immediata conseguenza il risultato:

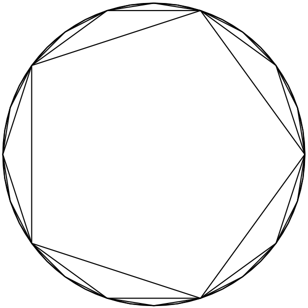
$$\frac{\operatorname{sen}\varepsilon}{\varepsilon} \sim 1 \;\Rightarrow\; \operatorname{sen}\varepsilon \sim \varepsilon$$

Una circonferenza è un poligono regolare di infiniti lati.

Funzioni trascendenti

Usando infiniti e infinitesimi, invece, possiamo dare una definizione di circonferenza che ha come immediata conseguenza il risultato:

$$\frac{\operatorname{sen}\varepsilon}{\varepsilon} \sim 1 \;\Rightarrow\; \operatorname{sen}\varepsilon \sim \varepsilon$$



Una circonferenza è un poligono regolare di infiniti lati.

Ora, in un poligono siffatto, ogni lato infinitesimo coincide con un arco infinitesimo.
Anche la metà dell'arco e la metà del lato saranno uguali tra di loro, quindi:

$$\operatorname{sen} \varepsilon \sim \varepsilon$$

È interessante ricordare che *seno* significa proprio *mezza corda*.

Derivate

Possiamo definire la tangente ad una curva in un suo punto come la retta passante per quel punto e per un punto della curva infinitamente vicino.
La derivata di una funzione in un punto è la parte standard del rapporto differenziale se esiste ed è indipendente dal valore dell'incremento infinitesimo:

$$f'(x) = \text{st}\left(\frac{d\ f(x)}{d\ x}\right) = \text{st}\left(\frac{f(x+\varepsilon) - f(x)}{\varepsilon}\right)$$

Derivate

Possiamo definire la tangente ad una curva in un suo punto come la retta passante per quel punto e per un punto della curva infinitamente vicino.

La derivata di una funzione in un punto è la parte standard del rapporto differenziale se esiste ed è indipendente dal valore dell'incremento infinitesimo:

$$f'(x) = \mathrm{st}\left(\frac{d\ f(x)}{d\ x}\right) = \mathrm{st}\left(\frac{f(x+\varepsilon) - f(x)}{\varepsilon}\right)$$

Derivate

Possiamo definire la tangente ad una curva in un suo punto come la retta passante per quel punto e per un punto della curva infinitamente vicino.
La derivata di una funzione in un punto è la parte standard del rapporto differenziale se esiste ed è indipendente dal valore dell'incremento infinitesimo:

$$f'(x) = \operatorname{st}\left(\frac{d\ f(x)}{d\ x}\right) = \operatorname{st}\left(\frac{f(x+\varepsilon) - f(x)}{\varepsilon}\right)$$

Derivate

Possiamo definire la tangente ad una curva in un suo punto come la retta passante per quel punto e per un punto della curva infinitamente vicino.
La derivata di una funzione in un punto è la parte standard del rapporto differenziale se esiste ed è indipendente dal valore dell'incremento infinitesimo:

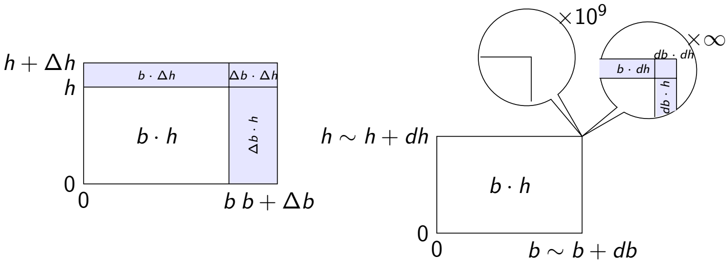
$$f'(x) = \mathrm{st}\left(\frac{d\ f(x)}{d\ x}\right) = \mathrm{st}\left(\frac{f(x+\varepsilon) - f(x)}{\varepsilon}\right)$$

Possiamo costruire le dimostrazioni dei teoremi sul calcolo, ad esempio per la derivata del prodotto di due funzioni passiamo attraverso il differenziale dell'area di un rettangolo. Come si può vedere dal disegno:

$$dA(x) \sim db(x) \cdot h(x) + b(x) \cdot dh(x)$$

Derivate

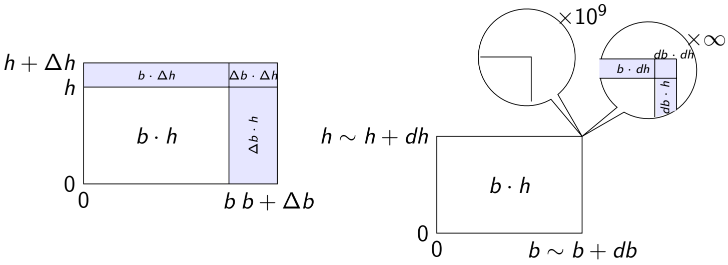
Possiamo costruire le dimostrazioni dei teoremi sul calcolo, ad esempio per la derivata del prodotto di due funzioni passiamo attraverso il differenziale dell'area di un rettangolo. Come si può vedere dal disegno:



$$dA(x) \sim db(x) \cdot h(x) + b(x) \cdot dh(x)$$

Derivate

Possiamo costruire le dimostrazioni dei teoremi sul calcolo, ad esempio per la derivata del prodotto di due funzioni passiamo attraverso il differenziale dell'area di un rettangolo. Come si può vedere dal disegno:



$$dA(x) \sim db(x) \cdot h(x) + b(x) \cdot dh(x)$$

Derivate

Poi dividendo per dx e prendendo la parte standard:

$$A'(x) = \text{st}\left(\frac{db(x) \cdot h(x)}{dx} + \frac{b(x) \cdot dh(x)}{dx}\right)$$

$$A'(x) = b'(x) \cdot h(x) + b(x) \cdot h'(x)$$

Continuità

Già la definizione di continuità risulta semplice e intuitiva:

Definizione

Una *funzione è continua* se a spostamenti infinitesimi di x corrispondono spostamenti infinitesimi di y:

$$f(x) \approx f(x + \varepsilon)$$

.

Continuità

Già la definizione di continuità risulta semplice e intuitiva:

Definizione

Una *funzione è continua* se a spostamenti infinitesimi di x corrispondono spostamenti infinitesimi di y:

$$f(x) \approx f(x+\varepsilon)$$

.

Continuità

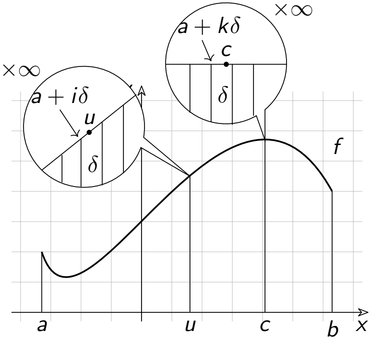
Vediamo anche come esempio il teorema di Weierstrass Sia $[a;\ b] \in \mathbb{R}$ un intervallo chiuso, limitato e non vuoto e sia $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora $f(x)$ ammette (almeno) un punto di massimo assoluto e un punto di minimo assoluto nell'intervallo $[a;\ b]$.

Continuità

Se suddividiamo l'intervallo $[a;\ b]$ in un certo numero di intervalli attraverso una sequenza di punti $t_1, t_2, \ldots, t_i, \ldots t_n$, confrontando i diversi valori di $f(t_i)$ posso individuare il valore che è maggiore o uguale (minore o uguale) a tutti gli altri.

Continuità

Per il principio di transfer posso ripetere lo stesso procedimento anche se gli intervalli sono infinitesimi cioè posso trovare un valore $f(t_k)$ che sia maggiore o uguale (minore o uguale) a tutti gli altri valori $f(t_i)$ prendendo la sua parte standard questa sarà maggiore o uguale (minore o uguale) a tutte le parti standard dei valori di $f(t)$ calcolati negli altri punti di separazione dell'intervallo.



Continuità

Quindi $\mathrm{st}\left(f\left(t_k\right)\right)$ è il massimo (minimo) della funzione f nell'intervallo $[a;\ b]$.

Integrali

Anche gli integrali beneficiano della possibilità di passare da successioni finite a successioni infinite grazie al principio di transfer. Avremo quindi la somma di Riemann finita e la somma di Riemann infinita e risulterà semplice dimostrare le varie proprietà degli integrali.

Integrali

Anche gli integrali beneficiano della possibilità di passare da successioni finite a successioni infinite grazie al principio di transfer. Avremo quindi la somma di Riemann finita e la somma di Riemann infinita e risulterà semplice dimostrare le varie proprietà degli integrali.

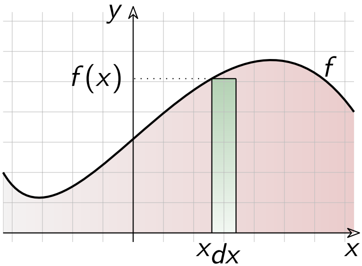
Integrali

Consideriamo il teorema fondamentale dell'analisi:

$$D\left[\int f\ dx\right] = f \qquad \text{ovvero} \qquad \int f\ dx = F \ \text{ se } \ F' = f$$

Integrali

Dobbiamo innanzitutto precisare cosa intendiamo per *funzione integrale* di una funzione f. Questa funzione spesso è indicata con F ed è legata all'area sottesa alla funzione f.



Se indichiamo con $F(x) = \mathcal{A}(x)$ quest'area, possiamo vedere che l'area di un tratto infinitesimo è

Integrali

$$d\ \mathcal{A}(x) \sim f(x) \cdot dx \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ f(x) \sim \frac{d\ \mathcal{A}(x)}{dx} = \frac{d\ F(x)}{dx} = F'(x)$$

Integrali

$$d\ \mathcal{A}(x) \sim f(x) \cdot dx \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ f(x) \sim \frac{d\ \mathcal{A}(x)}{dx} = \frac{d\ F(x)}{dx} = F'(x)$$

Limiti

Il concetto di limite non è necessario nell'analisi non standard, ma qualche volta può essere una ridondanza utile. Si può definire il limite di una funzione nei termini dell'Analisi Non Standard:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \operatorname{st}\left(f(a+\varepsilon)\right)$$

Limiti

Il concetto di limite non è necessario nell'analisi non standard, ma qualche volta può essere una ridondanza utile. Si può definire il limite di una funzione nei termini dell'Analisi Non Standard:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \mathrm{st}\left(f(a+\varepsilon)\right)$$

Limiti

Il concetto di limite non è necessario nell'analisi non standard, ma qualche volta può essere una ridondanza utile. Si può definire il limite di una funzione nei termini dell'Analisi Non Standard:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \operatorname{st}\left(f(a+\varepsilon)\right)$$

Limiti

I problemi sorgono quando nell'Analisi Standard si usa il simbolo ∞ che non è un numero reale ma un concetto che ha a che fare con la frase: "una *cosa* più grande di un *qualunque* numero reale." Per Keisler se $f(a+\varepsilon)$ è un numero infinito allora non esiste il limite. È una posizione semplice e interessante.

Limiti

I problemi sorgono quando nell'Analisi Standard si usa il simbolo ∞ che non è un numero reale ma un concetto che ha a che fare con la frase: "una *cosa* più grande di un *qualunque* numero reale." Per Keisler se $f(a+\varepsilon)$ è un numero infinito allora non esiste il limite. È una posizione semplice e interessante.

Limiti

Quindi dobbiamo complicare un po' la definizione:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \begin{cases} \mathrm{st}\left(f(a+\varepsilon)\right) & \text{se} \quad f(a+\varepsilon) \quad \text{è finito} \\ \infty & \text{se} \quad f(a+\varepsilon) \quad \text{è infinito} \end{cases}$$

Svantaggi

Perché **non usare** il calcolo infinitesimale?

- Bisogna trattare insiemi numerici *non archimedei*;
- Spesso richiede uno studio ulteriore da parte dell'insegnante;
- È molto recente (solo mezzo secolo);
- Usa metodi antichi;
- È conosciuto solo da una esigua minoranza di insegnanti;
- Probabilmente i nostri alunni dovranno impararsi anche l'analisi Standard;
- Non c'è nei libri di testo (seri);
-

Svantaggi

Perché **non usare** il calcolo infinitesimale?

- Bisogna trattare insiemi numerici *non archimedei*;
- Spesso richiede uno studio ulteriore da parte dell'insegnante;
- È molto recente (solo mezzo secolo);
- Usa metodi antichi;
- È conosciuto solo da una esigua minoranza di insegnanti;
- Probabilmente i nostri alunni dovranno impararsi anche l'analisi Standard;
- Non c'è nei libri di testo (seri);
- ...

Svantaggi

Perché **non usare** il calcolo infinitesimale?

- Bisogna trattare insiemi numerici *non archimedei*;
- Spesso richiede uno studio ulteriore da parte dell'insegnante;
- È molto recente (solo mezzo secolo);
- Usa metodi antichi;
- È conosciuto solo da una esigua minoranza di insegnanti;
- Probabilmente i nostri alunni dovranno impararsi anche l'analisi Standard;
- Non c'è nei libri di testo (seri);
- ...

Svantaggi

Perché **non usare** il calcolo infinitesimale?

- Bisogna trattare insiemi numerici *non archimedei*;
- Spesso richiede uno studio ulteriore da parte dell'insegnante;
- È molto recente (solo mezzo secolo);
- Usa metodi antichi;
- È conosciuto solo da una esigua minoranza di insegnanti;
- Probabilmente i nostri alunni dovranno impararsi anche l'analisi Standard;
- Non c'è nei libri di testo (seri);
- ...

Svantaggi

Perché **non usare** il calcolo infinitesimale?

- Bisogna trattare insiemi numerici *non archimedei*;
- Spesso richiede uno studio ulteriore da parte dell'insegnante;
- È molto recente (solo mezzo secolo);
- Usa metodi antichi;
- È conosciuto solo da una esigua minoranza di insegnanti;
- Probabilmente i nostri alunni dovranno impararsi anche l'analisi Standard;
- Non c'è nei libri di testo (seri);
- ...

Svantaggi

Perché **non usare** il calcolo infinitesimale?

- Bisogna trattare insiemi numerici *non archimedei*;
- Spesso richiede uno studio ulteriore da parte dell'insegnante;
- È molto recente (solo mezzo secolo);
- Usa metodi antichi;
- È conosciuto solo da una esigua minoranza di insegnanti;
- Probabilmente i nostri alunni dovranno impararsi anche l'analisi Standard;
- Non c'è nei libri di testo (seri);
- ...

Svantaggi

Perché **non usare** il calcolo infinitesimale?

- Bisogna trattare insiemi numerici *non archimedei*;
- Spesso richiede uno studio ulteriore da parte dell'insegnante;
- È molto recente (solo mezzo secolo);
- Usa metodi antichi;
- È conosciuto solo da una esigua minoranza di insegnanti;
- Probabilmente i nostri alunni dovranno impararsi anche l'analisi Standard;
- Non c'è nei libri di testo (seri);
- ...

Svantaggi

Perché **non usare** il calcolo infinitesimale?

- Bisogna trattare insiemi numerici *non archimedei*;
- Spesso richiede uno studio ulteriore da parte dell'insegnante;
- È molto recente (solo mezzo secolo);
- Usa metodi antichi;
- È conosciuto solo da una esigua minoranza di insegnanti;
- Probabilmente i nostri alunni dovranno impararsi anche l'analisi Standard;
- Non c'è nei libri di testo (seri);
- ...

Svantaggi

Perché **non usare** il calcolo infinitesimale?

- Bisogna trattare insiemi numerici *non archimedei*;
- Spesso richiede uno studio ulteriore da parte dell'insegnante;
- È molto recente (solo mezzo secolo);
- Usa metodi antichi;
- È conosciuto solo da una esigua minoranza di insegnanti;
- Probabilmente i nostri alunni dovranno impararsi anche l'analisi Standard;
- Non c'è nei libri di testo (seri);
- ...

Vantaggi

Perché **usare** il calcolo infinitesimale?

- Bisogna trattare insiemi numerici *non archimedei*;
- Spesso richiede uno studio ulteriore da parte dell'insegnante;
- È molto recente (solo mezzo secolo);
- Usa metodi antichi;
- È conosciuto solo da una esigua minoranza di insegnanti;
- Probabilmente i nostri alunni dovranno imparare anche l'analisi Standard;
- Non c'è nei libri di testo (seri);
-

Vantaggi

Perché **usare** il calcolo infinitesimale?

- Bisogna trattare insiemi numerici *non archimedei*;
- Spesso richiede uno studio ulteriore da parte dell'insegnante;
- È molto recente (solo mezzo secolo);
- Usa metodi antichi;
- È conosciuto solo da una esigua minoranza di insegnanti;
- Probabilmente i nostri alunni dovranno impararsi anche l'analisi Standard;
- Non c'è nei libri di testo (seri);
- ...

Vantaggi

Perché **usare** il calcolo infinitesimale?

- Bisogna trattare insiemi numerici *non archimedei*;
- Spesso richiede uno studio ulteriore da parte dell'insegnante;
- È molto recente (solo mezzo secolo);
- Usa metodi antichi;
- È conosciuto solo da una esigua minoranza di insegnanti;
- Probabilmente i nostri alunni dovranno impararsi anche l'analisi Standard;
- Non c'è nei libri di testo (seri);
- ...

Vantaggi

Perché **usare** il calcolo infinitesimale?

- Bisogna trattare insiemi numerici *non archimedei*;
- Spesso richiede uno studio ulteriore da parte dell'insegnante;
- È molto recente (solo mezzo secolo);
- Usa metodi antichi;
- È conosciuto solo da una esigua minoranza di insegnanti;
- Probabilmente i nostri alunni dovranno impararsi anche l'analisi Standard;
- Non c'è nei libri di testo (seri);
- ...

Vantaggi

Perché **usare** il calcolo infinitesimale?

- Bisogna trattare insiemi numerici *non archimedei*;
- Spesso richiede uno studio ulteriore da parte dell'insegnante;
- È molto recente (solo mezzo secolo);
- Usa metodi antichi;
- È conosciuto solo da una esigua minoranza di insegnanti;
- Probabilmente i nostri alunni dovranno impararsi anche l'analisi Standard;
- Non c'è nei libri di testo (seri);
- ...

Vantaggi

Perché **usare** il calcolo infinitesimale?

- Bisogna trattare insiemi numerici *non archimedei*;
- Spesso richiede uno studio ulteriore da parte dell'insegnante;
- È molto recente (solo mezzo secolo);
- Usa metodi antichi;
- È conosciuto solo da una esigua minoranza di insegnanti;
- Probabilmente i nostri alunni dovranno impararsi anche l'analisi Standard;
- Non c'è nei libri di testo (seri);
- ...

Vantaggi

Perché **usare** il calcolo infinitesimale?

- Bisogna trattare insiemi numerici *non archimedei*;
- Spesso richiede uno studio ulteriore da parte dell'insegnante;
- È molto recente (solo mezzo secolo);
- Usa metodi antichi;
- È conosciuto solo da una esigua minoranza di insegnanti;
- Probabilmente i nostri alunni dovranno impararsi anche l'analisi Standard;
- Non c'è nei libri di testo (seri);
- ...

Vantaggi

Perché **usare** il calcolo infinitesimale?

- Bisogna trattare insiemi numerici *non archimedei*;
- Spesso richiede uno studio ulteriore da parte dell'insegnante;
- È molto recente (solo mezzo secolo);
- Usa metodi antichi;
- È conosciuto solo da una esigua minoranza di insegnanti;
- Probabilmente i nostri alunni dovranno impararsi anche l'analisi Standard;
- Non c'è nei libri di testo (seri);
- ...

Vantaggi

Perché **usare** il calcolo infinitesimale?

- Bisogna trattare insiemi numerici *non archimedei*;
- Spesso richiede uno studio ulteriore da parte dell'insegnante;
- È molto recente (solo mezzo secolo);
- Usa metodi antichi;
- È conosciuto solo da una esigua minoranza di insegnanti;
- Probabilmente i nostri alunni dovranno impararsi anche l'analisi Standard;
- Non c'è nei libri di testo (seri);
- ...

Vantaggi

Perché **usare** il calcolo infinitesimale?

. . . perché e bello.

Vantaggi

Perché **usare** il calcolo infinitesimale?

. . . perché e bello.