Gli infinitesimi in Natura

VII Giornata Nazionale di Analisi Non Standard
Venezia, 2017

Vieri Benci
Università di Pisa

September 27, 2017

Gli infinitesimi ed il linguaggio della natura

Prima di entrare nel vivo dell'argomento,

vorrei esporre il mio punto di vista epistemologico riguardo alla **matematica non-archimedea**

Gli infinitesimi ed il linguaggio della natura

Prima di entrare nel vivo dell'argomento,

vorrei esporre il mio punto di vista epistemologico riguardo alla **matematica non-archimedea**

ed in particolare all'ANS

Gli infinitesimi ed il linguaggio della natura

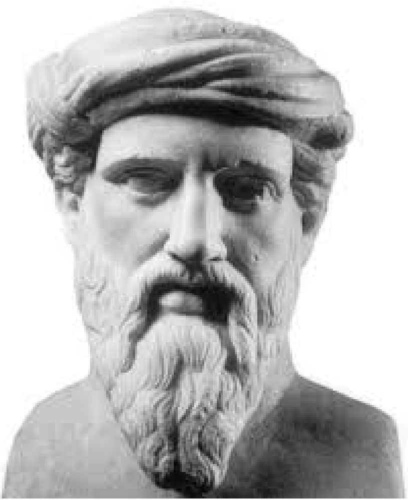
Prima di entrare nel vivo dell'argomento,

vorrei esporre il mio punto di vista epistemologico riguardo alla **matematica non-archimedea**

ed in particolare all'ANS

Ma voglio partire da lontano.

Pitagora



Tutto è numero.

Russell

Non so di nessun altro uomo che abbia avuto altrettanta influenza nella sfera del pensiero

Russell

Non so di nessun altro uomo che abbia avuto altrettanta influenza nella sfera del pensiero

L'intera concezione di un mondo eterno rivelato all'intelletto, ma non ai sensi, deriva da lui.

Russell

Non so di nessun altro uomo che abbia avuto altrettanta influenza nella sfera del pensiero

L'intera concezione di un mondo eterno rivelato all'intelletto, ma non ai sensi, deriva da lui. Se non fosse per lui, i Cristiani non avrebbero pensato a Cristo come al Verbo; se non fosse per lui i teologi non avrebbero cercato prove logiche di Dio e dell'immortalità.

Russell

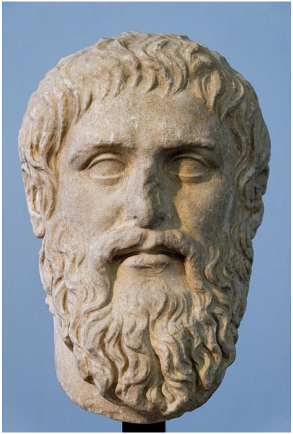
Non so di nessun altro uomo che abbia avuto altrettanta influenza nella sfera del pensiero

L'intera concezione di un mondo eterno rivelato all'intelletto, ma non ai sensi, deriva da lui. Se non fosse per lui, i Cristiani non avrebbero pensato a Cristo come al Verbo; se non fosse per lui i teologi non avrebbero cercato prove logiche di Dio e dell'immortalità.

Bertrand Russell, Storia della filosofia occidentale, (1948) Se non fosse per lui, la **scienza moderna, basata sulla matematica**, forse non sarebbe nata.

Se non fosse per lui, la **scienza moderna, basata sulla matematica**, forse non sarebbe nata.

Ma forse non è vero: esiste un altro uomo che forse ha influenzato la nostra civiltà più di Pitagora:



Platone: molte idee che in Pitagora erano implicite sono diventate esplicite.

Schema generale della scienza occidentale

La **SCIENZA** (occidentale) è essenzialmente platonica.

1. le "verità scientifiche" non riguardano oggetti concreti ma

ENTI TEORICI

Schema generale della scienza occidentale

La **SCIENZA** (occidentale) è essenzialmente platonica.

1. le "verità scientifiche" non riguardano oggetti concreti ma

ENTI TEORICI

2. le teorie scientifiche hanno una struttura deduttiva

$$\boxed{\textbf{ASSIOMI o PRINCIPI}}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\textbf{ENUNCIATI SCIENTIFICI}}$$

Schema generale della scienza occidentale

La **SCIENZA** (occidentale) è essenzialmente platonica.

1. le "verità scientifiche" non riguardano oggetti concreti ma

   ENTI TEORICI

2. le teorie scientifiche hanno una struttura deduttiva

   $$\boxed{\textbf{ASSIOMI o PRINCIPI}}$$
   $$\Downarrow$$
   $$\boxed{\textbf{ENUNCIATI SCIENTIFICI}}$$

3. vi sono "regole di interpretazione" che permettono di stabilire una corrispondenza tra

   ENUNCIATI SCIENTIFICI e FENOMENI

   che determinano la validità e l'applicabilità di una teoria oppure la falsificano.

Dunque la scienza si basa su concetti astratti e in particlare sulla matematica. Questi concetti sono idee che vivono in un mondo ideale (iperuranio).

Dunque la scienza si basa su concetti astratti e in particlare sulla matematica. Questi concetti sono idee che vivono in un mondo ideale (iperuranio).

La cosa sorprendente è che operando con questi concetti si riesce ad avere un grande controllo sul mondo della materia.

Dunque la scienza si basa su concetti astratti e in particlare sulla matematica. Questi concetti sono idee che vivono in un mondo ideale (iperuranio).

La cosa sorprendente è che operando con questi concetti si riesce ad avere un grande controllo sul mondo della materia.

Questa non è una cosa scontata, anche so talvolta ci appare ovvia.

Galileo

Galileo

La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne' quali è scritto.

Galileo

La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, numeri infiniti ed infinitesimi ed altri oggetti matematici, senza i quali mezzi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto.

Galileo Galilei, Il Saggiatore (1623), Cap. VI

Galileo

La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, **numeri infiniti ed infinitesimi ed altri oggetti matematici,** *senza i quali mezzi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto.*

Galileo Galilei, Il Saggiatore (1623), Cap. VI

Gli infinitesimi nelle scienze empiriche

Assumiamo il punto di vista Galileano ovvero che

"*la matematica è il linguaggio della natura*"

Gli infinitesimi nelle scienze empiriche

Assumiamo il punto di vista Galileano ovvero che

"la matematica è il linguaggio della natura"

e vediamo alcuni fenomeni che non possono essere descritti (facilmente) senza l'uso di infinitesimi.

La matematica come linguaggio della natura

I numeri reali sono una buona *approssimazione* dei numeri decimali finiti......

La matematica come linguaggio della natura

I numeri reali sono una buona *approssimazione* dei numeri decimali finiti......

I numeri infinitesimi sono una buona approssimazione dei numeri piccoli.

La matematica come linguaggio della natura

I numeri reali sono una buona *approssimazione* dei numeri decimali finiti......

I numeri infinitesimi sono una buona approssimazione dei numeri piccoli.

I numeri **reali**, non sono più **reali** di quanto non lo siano i numeri infinitesimi

La matematica come linguaggio della natura

I numeri reali sono una buona *approssimazione* dei numeri decimali finiti......

I numeri infinitesimi sono una buona approssimazione dei numeri piccoli.

I numeri **reali**, non sono più **reali** di quanto non lo siano i numeri infinitesimi o i numeri complessi

La matematica come linguaggio della natura

I numeri reali sono una buona *approssimazione* dei numeri decimali finiti......

I numeri infinitesimi sono una buona approssimazione dei numeri piccoli.

I numeri **reali**, non sono più **reali** di quanto non lo siano i numeri infinitesimi o i numeri complessi, o qualunque altro oggetto matematico.

O forse in tutto ciò c'è qualcosa di più profondo....

O forse in tutto ciò c'è qualcosa di più profondo....

Ma la discussione di ciò ci porterebbe lontano dall'oggetto di questo seminario.

O forse in tutto ciò c'è qualcosa di più profondo....

Ma la discussione di ciò ci porterebbe lontano dall'oggetto di questo seminario.

Dunque, accettiamo (provvisoriamente - per questo seminario) un punto di vista pragmatico e veniamo all'oggetto principale di questo seminario: l'uso degli infinitesimi nelle scienze naturali.

O forse in tutto ciò c'è qualcosa di più profondo....

Ma la discussione di ciò ci porterebbe lontano dall'oggetto di questo seminario.

Dunque, accettiamo (provvisoriamente - per questo seminario) un punto di vista pragmatico e veniamo all'oggetto principale di questo seminario: l'uso degli infinitesimi nelle scienze naturali.

In particolare nel calcolo delle probabilità.

Calcolo delle probabilità

La scelta del calcolo delle probabilità è stata determinata da diversi motivi:

Calcolo delle probabilità

La scelta del calcolo delle probabilità è stata determinata da diversi motivi:

- in primo luogo il calcolo delle probabilità viene utilizzato praticamente in ogni dominio della Scienza,

Calcolo delle probabilità

La scelta del calcolo delle probabilità è stata determinata da diversi motivi:

- in primo luogo il calcolo delle probabilità viene utilizzato praticamente in ogni dominio della Scienza,
- in secondo luogo perchè il dibattito scientifico e filosofico sull'uso degli infinitesimi in quasto campo attualmente è assai vivace

Calcolo delle probabilità

La scelta del calcolo delle probabilità è stata determinata da diversi motivi:

- in primo luogo il calcolo delle probabilità viene utilizzato praticamente in ogni dominio della Scienza,
- in secondo luogo perchè il dibattito scientifico e filosofico sull'uso degli infinitesimi in quasto campo attualmente è assai vivace
- ma soprattutto perché si possono trattare esempi significativi con tecniche estremamente semplici e che possono essere usate in una scuola superiore.

Calcolo delle probabilità

Calcolo delle probabilità

Limiti del calcolo delle probabilità basato sugli assiomi di Kolmogorov

Gli assiomi di Kolmogorov immergono il calcolo delle probabilità nella teoria della misura.

Calcolo delle probabilità

Limiti del calcolo delle probabilità basato sugli assiomi di Kolmogorov

Gli assiomi di Kolmogorov immergono il calcolo delle probabilità nella teoria della misura. Dunque spesso, capita lo spiacevole fatto di incontrare insiemi (eventi) di misura nulla.

Insiemi di misura nulla

Nella teoria della misura, gli insiemi di misura nulla sono legittimi:

Insiemi di misura nulla

Nella teoria della misura, gli insiemi di misura nulla sono legittimi: e.g. un meridiano terrestre ha *superficie* 0.

Insiemi di misura nulla

Nella teoria della misura, gli insiemi di misura nulla sono legittimi: e.g. un meridiano terrestre ha *superficie* 0.

Ma nel calcolo della probabilità, gli eventi di probabilità nulla sono a dir poco imbarazzanti.

Insiemi di misura nulla

Nella teoria della misura, gli insiemi di misura nulla sono legittimi: e.g. un meridiano terrestre ha *superficie* 0.

Ma nel calcolo della probabilità, gli eventi di probabilità nulla sono a dir poco imbarazzanti.
Infatti non possono essere interpretati come eventi *impossibili.*

Insiemi di misura nulla

Nella teoria della misura, gli insiemi di misura nulla sono legittimi: e.g. un meridiano terrestre ha *superficie* 0.

Ma nel calcolo della probabilità, gli eventi di probabilità nulla sono a dir poco imbarazzanti.
Infatti non possono essere interpretati come eventi *impossibili.*

Vediamo un esempio: supponiamo che un meteorite cada sulla terra colpendo un punto con probabilità proporzionale alla superficie.

Insiemi di misura nulla

Nella teoria della misura, gli insiemi di misura nulla sono legittimi: e.g. un meridiano terrestre ha *superficie* 0.

Ma nel calcolo della probabilità, gli eventi di probabilità nulla sono a dir poco imbarazzanti.
Infatti non possono essere interpretati come eventi *impossibili.*

Vediamo un esempio: supponiamo che un meteorite cada sulla terra colpendo un punto con probabilità proporzionale alla superficie. Esso cadrà ad una certa longitudine,

Insiemi di misura nulla

Nella teoria della misura, gli insiemi di misura nulla sono legittimi: e.g. un meridiano terrestre ha *superficie* 0.

Ma nel calcolo della probabilità, gli eventi di probabilità nulla sono a dir poco imbarazzanti.
Infatti non possono essere interpretati come eventi *impossibili.*

Vediamo un esempio: supponiamo che un meteorite cada sulla terra colpendo un punto con probabilità proporzionale alla superficie. Esso cadrà ad una certa longitudine, ovvero colpisce un certo meridiano

Insiemi di misura nulla

Nella teoria della misura, gli insiemi di misura nulla sono legittimi: e.g. un meridiano terrestre ha *superficie* 0.

Ma nel calcolo della probabilità, gli eventi di probabilità nulla sono a dir poco imbarazzanti.
Infatti non possono essere interpretati come eventi *impossibili.*

Vediamo un esempio: supponiamo che un meteorite cada sulla terra colpendo un punto con probabilità proporzionale alla superficie. Esso cadrà ad una certa longitudine, ovvero colpisce un certo meridiano rappresentato da un insieme/evento di probabilità nulla.

Insiemi di misura nulla

Nella teoria della misura, gli insiemi di misura nulla sono legittimi: e.g. un meridiano terrestre ha *superficie* 0.

Ma nel calcolo della probabilità, gli eventi di probabilità nulla sono a dir poco imbarazzanti.
Infatti non possono essere interpretati come eventi *impossibili.*

Vediamo un esempio: supponiamo che un meteorite cada sulla terra colpendo un punto con probabilità proporzionale alla superficie. Esso cadrà ad una certa longitudine, ovvero colpisce un certo meridiano rappresentato da un insieme/evento di probabilità nulla.

Dunque gli eventi di probabilità nulla rappresentano eventi molto rari.

Insiemi di misura nulla

Nella teoria della misura, gli insiemi di misura nulla sono legittimi: e.g. un meridiano terrestre ha *superficie* 0.

Ma nel calcolo della probabilità, gli eventi di probabilità nulla sono a dir poco imbarazzanti.
Infatti non possono essere interpretati come eventi *impossibili.*

Vediamo un esempio: supponiamo che un meteorite cada sulla terra colpendo un punto con probabilità proporzionale alla superficie. Esso cadrà ad una certa longitudine, ovvero colpisce un certo meridiano rappresentato da un insieme/evento di probabilità nulla.

Dunque gli eventi di probabilità nulla rappresentano eventi molto rari. Ma non impossibili.

Insiemi di misura nulla

Nella teoria della misura, gli insiemi di misura nulla sono legittimi: e.g. un meridiano terrestre ha *superficie* 0.

Ma nel calcolo della probabilità, gli eventi di probabilità nulla sono a dir poco imbarazzanti.
Infatti non possono essere interpretati come eventi *impossibili.*

Vediamo un esempio: supponiamo che un meteorite cada sulla terra colpendo un punto con probabilità proporzionale alla superficie. Esso cadrà ad una certa longitudine, ovvero colpisce un certo meridiano rappresentato da un insieme/evento di probabilità nulla.

Dunque gli eventi di probabilità nulla rappresentano eventi molto rari. Ma non impossibili. Ma tutto questo porta dei guai.

Conseguenze tecniche di tutto ciò

Problem

Se un meteorite è caduto alla longitudine di $11^{\circ}E$*, qual'è la probabilità che sia caduto entro un raggio di 100 Km. da Firenze.*

Il nostro problema è risolto dalla probabilità condizionata

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Il nostro problema è risolto dalla probabilità condizionata

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Nel nostro caso,

$$B = \{\text{un meteorite è caduto alla longitudine di } 11^\circ E\}$$

e

$$A \cap B = \{\text{un meteorite è caduto alla longitudine di } 11^\circ E \text{ in un raggio di 100 Km. da Firenze.}\}$$

Il nostro problema è risolto dalla probabilità condizionata

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Nel nostro caso,

$$B = \{\text{un meteorite è caduto alla longitudine di } 11^\circ E\}$$

e

$$A \cap B = \{\text{un meteorite è caduto alla longitudine di } 11^\circ E \\ \text{in un raggio di 100 Km. da Firenze.}\}$$

sono eventi di probabilità nulla, e dunque tutto ciò, nel calcolo delle probabilità kolmogoroviano, non ha senso.

Il nostro problema è risolto dalla probabilità condizionata

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Nel nostro caso,

$$B = \{\text{un meteorite è caduto alla longitudine di } 11^\circ E\}$$

e

$$A \cap B = \{\text{un meteorite è caduto alla longitudine di } 11^\circ E \\ \text{in un raggio di 100 Km. da Firenze.}\}$$

sono eventi di probabilità nulla, e dunque tutto ciò, nel calcolo delle probabilità kolmogoroviano, non ha senso.

$$\frac{0}{0}$$

è un numero proibito da tutte le leggi!!!

Assiomi della probabilità non archimedea

- (NAP0) **Domain and range.** *The events are the subsets of* Ω *and the probability is a function*

$$P : \mathcal{P}\left(\Omega\right) \to \mathfrak{R}$$

where $\mathfrak{R}$ *is an ordered field.*

Assiomi della probabilità non archimedea

- (NAP0) **Domain and range.** *The events are the subsets of* Ω *and the probability is a function*

$$P : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow \mathfrak{R}$$

where $\mathfrak{R}$ *is an ordered field.*

- (NAP1) **Regularity.** $P(\varnothing) = 0$ *and* $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega) \setminus \{\varnothing\}$,

$$P(A) > 0$$

Assiomi della probabilità non archimedea

- (NAP0) **Domain and range.** *The events are the subsets of* Ω *and the probability is a function*

$$P : \mathcal{P}(\Omega) \to \mathfrak{R}$$

where $\mathfrak{R}$ *is an ordered field.*

- (NAP1) **Regularity.** $P(\varnothing) = 0$ *and* $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega) \setminus \{\varnothing\}$,

$$P(A) > 0$$

- (NAP2) **Normalization.**

$$P(\Omega) = 1$$

Assiomi della probabilità non archimedea

- (NAP0) **Domain and range.** *The events are the subsets of* Ω *and the probability is a function*

$$P : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow \mathfrak{R}$$

where $\mathfrak{R}$ *is an ordered field.*

- (NAP1) **Regularity.** $P(\varnothing) = 0$ *and* $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega) \setminus \{\varnothing\}$,

$$P(A) > 0$$

- (NAP2) **Normalization.**

$$P(\Omega) = 1$$

- (NAP3) **Additivity.** *If* A *and* B *are events and* $A \cap B = \varnothing$, then

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Assiomi della probabilità non archimedea

- (NAP0) **Domain and range.** *The events are the subsets of* Ω *and the probability is a function*

$$P : \mathcal{P}\left(\Omega\right) \rightarrow \mathfrak{R}$$

where $\mathfrak{R}$ *is an ordered field.*

- (NAP1) **Regularity.** $P(\varnothing) = 0$ *and* $\forall A \in \mathcal{P}\left(\Omega\right) \setminus \left\{\varnothing\right\}$,

$$P(A) > 0$$

- (NAP2) **Normalization.**

$$P(\Omega) = 1$$

- (NAP3) **Additivity.** *If* A *and* B *are events and* $A \cap B = \varnothing$, then

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Assiomi della probabilità non archimedea

- (NAP0) **Domain and range.** *The events are the subsets of* Ω *and the probability is a function*

$$P : \mathcal{P}(\Omega) \to \mathfrak{R}$$

where $\mathfrak{R}$ *is an ordered field.*

- (NAP1) **Regularity.** $P(\varnothing) = 0$ *and* $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega) \setminus \{\varnothing\}$,

$$P(A) > 0$$

- (NAP2) **Normalization.**

$$P(\Omega) = 1$$

- (NAP3) **Additivity.** *If* A *and* B *are events and* $A \cap B = \varnothing$, then

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

NB: Ci sono solo due piccole differenze con gli assiomi di Kolmogorov.

Assiomi della probabilità non archimedea

- (NAP0) **Domain and range.** *The events are the subsets of* Ω *and the probability is a function*

$$P : \mathcal{P}(\Omega) \to \mathfrak{R}$$

where $\mathfrak{R}$ *is an ordered field.*

- (NAP1) **Regularity.** $P(\varnothing) = 0$ *and* $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega) \setminus \{\varnothing\}$,

$$P(A) > 0$$

- (NAP2) **Normalization.**

$$P(\Omega) = 1$$

- (NAP3) **Additivity.** *If* A *and* B *are events and* $A \cap B = \varnothing$, then

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

NB: Ci sono solo due piccole differenze con gli assiomi di Kolmogorov. Inoltre manca l'assioma di continuità, ma questo fatto lo discuteremo in seguito.

Questi assiomi implicano che, in generale, $\mathfrak{R}$ deve essere un campo non archimedeo.

Questi assiomi implicano che, in generale, $\mathfrak{R}$ deve essere un campo non archimedeo.

Esempio: Lotteria di De Finetti $(\Omega = \mathbb{N})$

Questi assiomi implicano che, in generale, $\mathfrak{R}$ deve essere un campo non archimedeo.

Esempio: Lotteria di De Finetti ($\Omega = \mathbb{N}$)
Vediamo perchè $\mathfrak{R}$ non può essere archimedeo.

Questi assiomi implicano che, in generale, $\mathfrak{R}$ deve essere un campo non archimedeo.

Esempio: Lotteria di De Finetti ($\Omega = \mathbb{N}$)
Vediamo perchè $\mathfrak{R}$ non può essere archimedeo.
Per l'assioma di regolarità (NAP2)

$$P(\{1\}) = \varepsilon > 0$$

Questi assiomi implicano che, in generale, $\mathfrak{R}$ deve essere un campo non archimedeo.

Esempio: Lotteria di De Finetti $(\Omega = \mathbb{N})$
Vediamo perchè $\mathfrak{R}$ non può essere archimedeo.
Per l'assioma di regolarità (NAP2)

$$P(\{1\}) = \varepsilon > 0$$

Se $\varepsilon \in \mathbb{R}$, allora, per la proprietà di Archimede, $\exists N \in \mathbb{N}$ tale che

$$\varepsilon N > 1;$$

Questi assiomi implicano che, in generale, $\mathfrak{R}$ deve essere un campo non archimedeo.

Esempio: Lotteria di De Finetti ($\Omega = \mathbb{N}$)
Vediamo perchè $\mathfrak{R}$ non può essere archimedeo.
Per l'assioma di regolarità (NAP2)

$$P(\{1\}) = \varepsilon > 0$$

Se $\varepsilon \in \mathbb{R}$, allora, per la proprietà di Archimede, $\exists N \in \mathbb{N}$ tale che

$$\varepsilon N > 1;$$

ma allora

$$P(\{1, 2, 3, ..., N\}) = \varepsilon N > 1$$

contraddicendo l'assioma di normalizzazione che implica che la probabilità di un evento è compresa tra 0 ed 1.

Se Ω ha la potenza superiore al numerabile, allora $\mathfrak{R}$ deve essere necessariamente non Archimedeo, anche se la probabilità non è equa.

Se Ω ha la potenza superiore al numerabile, allora $\mathfrak{R}$ deve essere necessariamente non Archimedeo, anche se la probabilità non è equa.

Infatti non esiste alcuna nozione di serie in cui si può sommare una infinità **non-numerabile** di addendi.

La costruzione di una teoria delle probabilità

Uno spazio di probabiltà è definito dalla coppia (Ω, w) ove Ω è lo spazio degli eventi e

$$w : \Omega \to \mathbb{R}^+$$

è la funzione "probabilità relativa".

La costruzione di una teoria delle probabilità

Uno spazio di probabiltà è definito dalla coppia (Ω, w) ove Ω è lo spazio degli eventi e

$$w : \Omega \to \mathbb{R}^+$$

è la funzione "probabilità relativa".
Il rapporto

$$\frac{w(x)}{w(y)}$$

dice di quanto l'evento $\{x\}$ è più probabile (più frequente, ha maggior grado di fiducia etc....) dell'evento $\{y\}$.

La costruzione di una teoria delle probabilità

Uno spazio di probabiltà è definito dalla coppia (Ω, w) ove Ω è lo spazio degli eventi e

$$w : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$$

è la funzione "probabilità relativa".
Il rapporto

$$\frac{w(x)}{w(y)}$$

dice di quanto l'evento $\{x\}$ è più probabile (più frequente, ha maggior grado di fiducia etc....) dell'evento $\{y\}$.

Dunque, la probabilità di un evento A è definita del seguente numero

$$P(A) = \frac{\sum_{\omega \in A} w(\omega)}{\sum_{\omega \in \Omega} w(\omega)}.$$

Quanto detto è la costruzione banale di uno spazio probabilità quando Ω è finito.

Quanto detto è la costruzione banale di uno spazio probabilità quando Ω è finito.

Quando Ω è infinito tutto ciò è altrettanto banale

Quanto detto è la costruzione banale di uno spazio probabilità quando Ω è finito.

Quando Ω è infinito tutto ciò è altrettanto banale

purchè si accettino le somme infinite
e quindi
numeri infiniti

La somma infinita

L'idea di somma infinita è alquanto naturale e non presenta grossi problemi filosofici,

La somma infinita

L'idea di somma infinita è alquanto naturale e non presenta grossi problemi filosofici, ma presenta problemi tecnici.

La somma infinita

L'idea di somma infinita è alquanto naturale e non presenta grossi problemi filosofici, ma presenta problemi tecnici. Per esempio si consideri

$$\sum_k (-1)^k = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + ...$$

La somma infinita

L'idea di somma infinita è alquanto naturale e non presenta grossi problemi filosofici, ma presenta problemi tecnici. Per esempio si consideri

$$\sum_k (-1)^k = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots\ldots$$

Applicando la proprietà associativa si ha:

$$(1-1) + (1-1) + (1-1) + (1-1) + \ldots\ldots = 0 + 0 + 0 + 0 + \ldots\ldots = 0$$

La somma infinita

L'idea di somma infinita è alquanto naturale e non presenta grossi problemi filosofici, ma presenta problemi tecnici. Per esempio si consideri

$$\sum_k (-1)^k = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + ...$$

Applicando la proprietà associativa si ha:

$$(1-1) + (1-1) + (1-1) + (1-1) + ... = 0 + 0 + 0 + 0 + ... = 0$$

ma applicando la proprietà associativa in modo diverso, si ha anche

$$1 + (-1+1) + (-1+1) + (-1+1) + ... = 1 + 0 + 0 + 0 + ... = 1$$

La somma transfinita

Pertanto, se vogliamo trattare numericamente certi problemi sembra naturale introdurre un nuovo algoritmo detto **somma transfinita** che *formalizza* mediante **regole precise** la generica nozione di somma infinita.

La somma transfinita

Tale somma verrà indicata nel seguente modo:

$$\sum_{k \in A} a_k . \tag{1}$$

ove A è un insieme di indici e gli a_k sono numeri in un campo non archimedeo contennte i numeri reali che denoteremo con $\mathbb{E}$.

La somma transfinita

Tale somma verrà indicata nel seguente modo:

$$\sum_{k \in A} a_k. \tag{1}$$

ove A è un insieme di indici e gli a_k sono numeri in un campo non archimedeo contennte i numeri reali che denoteremo con $\mathbb{E}$.
Si deve supporre $A \subset \mathbb{U}$, ovvero che l'insieme degli indici sia un sottoinsieme $\mathbb{U}$ che supporremo fissato una volta per tutte.

La somma transfinita

La nozione di somma transfinita non coincide con la nozione di serie anche quando gli addendi sono numeri naturali;

La somma transfinita

La nozione di somma transfinita non coincide con la nozione di serie anche quando gli addendi sono numeri naturali; per evidenziare la loro differenza useremo simboli diversi;

$$\sum_{k \in A} a_k$$

per le somma transfinite;

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

per le serie usuali quando saranno introdotte.

La somma transfinita

L'operazione "*somma transfinita*" è governata dalle seguenti regole:

La somma transfinita

L'operazione "*somma transfinita*" è governata dalle seguenti regole:

1. Qualunque siano gli $a_k \in \mathbb{E}$, la somma transfinita è ben definita e denota un numero in $\mathbb{E}$.

La somma transfinita

L'operazione "*somma transfinita*" è governata dalle seguenti regole:

1. Qualunque siano gli $a_k \in \mathbb{E}$, la somma transfinita è ben definita e denota un numero in $\mathbb{E}$.
2. Se $a_k = 0$ tranne un numero finito di termini, allora la somma transfinita coincide con la somma usuale

La somma transfinita

L'operazione "*somma transfinita*" è governata dalle seguenti regole:

1. Qualunque siano gli $a_k \in \mathbb{E}$, la somma transfinita è ben definita e denota un numero in $\mathbb{E}$.
2. Se $a_k = 0$ tranne un numero finito di termini, allora la somma transfinita coincide con la somma usuale
3. $\left(\sum_{k\in A} a_k\right) + \left(\sum_{k\in A} b_k\right) = \sum_{k\in A} \left(a_k + b_k\right)$

La somma transfinita

L'operazione "*somma transfinita*" è governata dalle seguenti regole:

1. Qualunque siano gli $a_k \in \mathbb{E}$, la somma transfinita è ben definita e denota un numero in $\mathbb{E}$.
2. Se $a_k = 0$ tranne un numero finito di termini, allora la somma transfinita coincide con la somma usuale
3. $\left(\sum_{k\in A} a_k\right) + \left(\sum_{k\in A} b_k\right) = \sum_{k\in A} \left(a_k + b_k\right)$
4. $\left(\sum_{k\in A} a_k\right) \cdot \left(\sum_{h\in B} b_h\right) = \sum_{(k,h)\in A\times B} a_k b_h$

La somma transfinita

L'operazione "*somma transfinita*" è governata dalle seguenti regole:

1. Qualunque siano gli $a_k \in \mathbb{E}$, la somma transfinita è ben definita e denota un numero in $\mathbb{E}$.
2. Se $a_k = 0$ tranne un numero finito di termini, allora la somma transfinita coincide con la somma usuale
3. $\left(\sum_{k\in A} a_k\right) + \left(\sum_{k\in A} b_k\right) = \sum_{k\in A}\left(a_k + b_k\right)$
4. $\left(\sum_{k\in A} a_k\right) \cdot \left(\sum_{h\in B} b_h\right) = \sum_{(k,h)\in A\times B} a_k b_h$
5. se per ogni insieme finito $F \subset A$ sufficientemente grande $p < \sum_{k\in F} a_k < q$, $(p, q \in \mathbb{R})$ allora

$$p < \sum_{k\in A} a_k < q$$

I numeri euclidei

L'insieme $\mathbb{E}$ definito dagli assiomi precedenti si chiama campo non archimedeo chiamato

$$\text{campo dei numeri euclidei}$$

Sorpresa!

Sorpresa!

I numeri euclidei sono un campo iperreale!!!

Sorpresa!

I numeri euclidei sono un campo iperreale!!!

Ma forse questa sorpresa dovevamo aspettarcela.......

Cerchiamo adesso di familiarizzarci con l'idea di somma transfinita. La cosa più semplice che può venire in mente è quella di sommare un po' di "1" e "0".

Cerchiamo adesso di familiarizzarci con l'idea di somma transfinita. La cosa più semplice che può venire in mente è quella di sommare un po' di "1" e "0".

Per formalizzare questo fatto risulta utile definire la funzione indicatrice di un sottoinsieme $E \subseteq \mathbb{U}$:

$$\chi_{_E}(k) = \begin{cases} 1 & se \quad k \in E \\ 0 & se \quad k \notin E. \end{cases}$$

La numerosità di un sottoinsieme dei naturali

Per ogni insieme infinito E si può definire il numero infinito

$$\mathfrak{n}\left(E\right) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \chi_{_E}(k)$$

detto numerosità di E. Se E è un insieme finito, la sua numerosità corrisponde al numero degli elementi di E.

La numerosità di un sottoinsieme dei naturali

Per ogni insieme infinito E si può definire il numero infinito

$$\mathfrak{n}(E) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \chi_{_E}(k)$$

detto numerosità di E. Se E è un insieme finito, la sua numerosità corrisponde al numero degli elementi di E. Altrimenti il numero $\mathfrak{n}(E)$ è un numero infinito che "generalizza" la precedente nozione.

Il numero omega

Il numero infinito più significativo è

$$\omega := \sum_{k \in \mathbb{N}} \chi_{\mathbb{N}}(k).$$

che si ottiene sommando tanti "uno" quanti sono i numeri naturali.

Il numero omega

Il numero infinito più significativo è

$$\omega := \sum_{k \in \mathbb{N}} \chi_{\mathbb{N}}(k).$$

che si ottiene sommando tanti "uno" quanti sono i numeri naturali.

Il simbolo ω è lo stesso che viene usato per denotare il numero ordinale relativo al tipo d'ordine di $\mathbb{N}$. Questo fatto è voluto, in quanto le due nozioni, procedendo nella teoria, possono essere identificate.

Il risultato di una somma infinita

Però bisogna fare attenzione; in generale una somma infinita non dà un ordinale: per esempio dalle regole della somma si deduce che

$$\sum_{k\in\mathbb{N}^+}\chi_{_\mathbb{N}}(k)=\omega-1.$$

ove $\mathbb{N}^+=\{1,2,3,...\}$.

Il risultato di una somma infinita

Si hanno i seguenti risultati:

$$\mathfrak{n}\left(\mathbb{P}\right) = \frac{\omega - 1}{2}$$

ove $\mathbb{P} = \{2, 4, 6, 8, ...\}$ è l'insieme dei numeri naturali pari positivi.

Il risultato di una somma infinita

Si hanno i seguenti risultati:

$$\mathfrak{n}\left(\mathbb{P}\right) = \frac{\omega - 1}{2}$$

ove $\mathbb{P} = \{2, 4, 6, 8, ...\}$ è l'insieme dei numeri naturali pari positivi.

$$\mathfrak{n}\left(\mathbb{D}\right) = \frac{\omega - 1}{2}$$

ove $\mathbb{D} = \{1, 3, 5, 7, ...\}$ è l'insieme dei numeri naturali pari negativi.

La numerosità di un prodotto

Come ci aspettiamo si ha che

$$\mathfrak{n}\left(\mathbb{N}\times\mathbb{N}\right)=\omega^{2}$$

La numerosità di un prodotto

Come ci aspettiamo si ha che

$$\mathfrak{n}\left(\mathbb{N}\times\mathbb{N}\right)=\omega^2$$

Infatti

$$\mathfrak{n}\left(\mathbb{N}\times\mathbb{N}\right) \quad = \quad \sum_{(k,h)\in A\times B}\chi_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}(k,h)$$

La numerosità di un prodotto

Come ci aspettiamo si ha che

$$\mathfrak{n}\left(\mathbb{N}\times\mathbb{N}\right)=\omega^2$$

Infatti

$$\mathfrak{n}\left(\mathbb{N}\times\mathbb{N}\right) \quad = \quad \sum_{(k,h)\in A\times B}\chi_{_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}}(k,h)=\sum_{(k,h)\in A\times B}\chi_{_{\mathbb{N}}}(k)\cdot\chi_{_{\mathbb{N}}}(h)$$

La numerosità di un prodotto

Come ci aspettiamo si ha che

$$\mathfrak{n}\left(\mathbb{N}\times\mathbb{N}\right)=\omega^2$$

Infatti

$$\begin{aligned}\mathfrak{n}\left(\mathbb{N}\times\mathbb{N}\right) &= \sum_{(k,h)\in A\times B}\chi_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}(k,h)=\sum_{(k,h)\in A\times B}\chi_{\mathbb{N}}(k)\cdot\chi_{\mathbb{N}}(h)\\ &= \left(\sum_{k\in A}\chi_{\mathbb{N}}(k)\right)\cdot\left(\sum_{h\in B}\chi_{\mathbb{N}}(h)\right)\end{aligned}$$

La numerosità di un prodotto

Come ci aspettiamo si ha che

$$\mathfrak{n}\left(\mathbb{N}\times\mathbb{N}\right)=\omega^{2}$$

Infatti

$$\begin{aligned}\mathfrak{n}\left(\mathbb{N}\times\mathbb{N}\right) &= \sum_{(k,h)\in A\times B}\chi_{_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}}(k,h)=\sum_{(k,h)\in A\times B}\chi_{_{\mathbb{N}}}(k)\cdot\chi_{_{\mathbb{N}}}(h)\\ &= \left(\sum_{k\in A}\chi_{_{\mathbb{N}}}(k)\right)\cdot\left(\sum_{h\in B}\chi_{_{\mathbb{N}}}(h)\right)=\omega\cdot\omega=\omega^{2}\end{aligned}$$

La probabilità non archimedea

Dunque, abbiamo questa caratterizzazione della NAP

$$P(A) = \frac{1}{N} \sum_{\omega \in A} w(\omega);$$

ove

$$N = \sum_{\omega \in \Omega} w(\omega).$$

è il fattore di normalizzazione

Probabilità equa

Si dice che uno spazio di probabiltà (Ω, w) definisce una probabiltà equa se w è costante [e.g. $w(\omega) = 1$, $\forall \omega \in \Omega$].

Probabilità equa

Si dice che uno spazio di probabiltà (Ω, w) definisce una probabiltà equa se w è costante [e.g. $w(\omega) = 1,\ \forall\omega \in \Omega$].
In questo caso abbiamo che

$$P(A) = \frac{\mathfrak{n}(A)}{\mathfrak{n}(\Omega)}.$$

Probabilità equa

La probabilità di un evento è dato da il rapporto tra il numero dei casi favorevoli $\mathfrak{n}(A)$ ed il numero di tutti i casi possibili $\mathfrak{n}(\Omega)$ - purchè equiprobabili

Probabilità equa

La probabilità di un evento è dato da il rapporto tra il numero dei casi favorevoli $\mathfrak{n}(A)$ ed il numero di tutti i casi possibili $\mathfrak{n}(\Omega)$ - purchè equiprobabili (la vecchia, cara e tautologica definizione classica di Laplace).

La lotteria di De Finetti

La lotteria di De Finetti è una lotteria equa avente una infinità numerabile di biglietti.

La lotteria di De Finetti

La lotteria di De Finetti è una lotteria equa avente una infinità numerabile di biglietti.
Essa rappresenta un modello che non può essere descritto dalla probabilità Kolmogoroviana.

La lotteria di De Finetti

La lotteria di De Finetti è una lotteria equa avente una infinità numerabile di biglietti.
Essa rappresenta un modello che non può essere descritto dalla probabilità Kolmogoroviana.
In questo caso abbiamo

$$\Omega = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$$

La lotteria di De Finetti

La lotteria di De Finetti è una lotteria equa avente una infinità numerabile di biglietti.
Essa rappresenta un modello che non può essere descritto dalla probabilità Kolmogoroviana.
In questo caso abbiamo

$$\Omega = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

Dunque

$$P(A) = \frac{\mathfrak{n}(A)}{\mathfrak{n}(\mathbb{N})} = \frac{\mathfrak{n}(A)}{\omega}$$

La lotteria di De Finetti

La lotteria di De Finetti è una lotteria equa avente una infinità numerabile di biglietti.
Essa rappresenta un modello che non può essere descritto dalla probabilità Kolmogoroviana.
In questo caso abbiamo

$$\Omega = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$$

Dunque

$$P(A) = \frac{\mathfrak{n}(A)}{\mathfrak{n}(\mathbb{N})} = \frac{\mathfrak{n}(A)}{\omega}$$

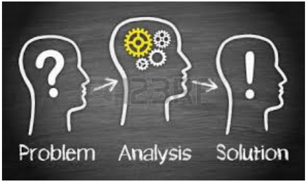
Per esempio se $A = \{1, 2, 3\}$

$$P(A) = \frac{\mathfrak{n}(A)}{\mathfrak{n}(\mathbb{N})} = \frac{3}{\omega} \sim 0.$$

Problemini

Problem

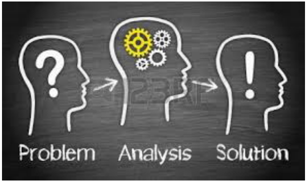
Qual'è la probabilità che alla lotteria di De Finetti esca un numero pari?



Problemini

Problem

Qual'è la probabilità che alla lotteria di De Finetti esca un numero pari?



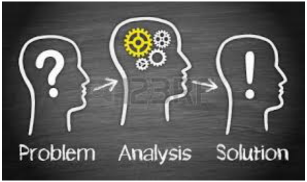
La probabilità $P(\mathbb{P})$ sarà

$$P(E) = \frac{\mathfrak{n}(\mathbb{P})}{\omega} = \frac{\frac{\omega+1}{2}}{\omega} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\omega} \sim \frac{1}{2}.$$

Problemini

Problem

Qual'è la probabilità che alla lotteria di De Finetti esca un numero pari?



La probabilità $P(\mathbb{P})$ sarà

$$P(E) = \frac{\mathfrak{n}(\mathbb{P})}{\omega} = \frac{\frac{\omega+1}{2}}{\omega} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\omega} \sim \frac{1}{2}.$$

Questo è proprio l'esempio che De Finetti usava per criticare la probabilità Kolmogoroviana incapace di modellizzare questo problema.

Problemini

Problem

Qual'è la probabilità che al primo colpo esca il numero 1 e al secondo colpo esca il numero 2?

Problemini

Problem

Qual'è la probabilità che al primo colpo esca il numero 1 e al secondo colpo esca il numero 2?

La probabilità $P(E)$ sarà

$$P(E) = P(\{1\}) \cdot \frac{P(\{2\})}{P(\mathbb{N} \setminus \{1\})}$$

Problemini

Problem

Qual'è la probabilità che al primo colpo esca il numero 1 e al secondo colpo esca il numero 2?

La probabilità $P(E)$ sarà

$$\begin{aligned} P(E) &= P(\{1\}) \cdot \frac{P(\{2\})}{P(\mathbb{N} \setminus \{1\})} \\ &= \frac{1}{\omega} \cdot \frac{1}{\omega - 1} \end{aligned}$$

Problemini

Problem

Qual'è la probabilità che al primo colpo esca il numero 1 e al secondo colpo esca il numero 2?

La probabilità $P(E)$ sarà

$$
\begin{aligned}
P(E) &= P(\{1\}) \cdot \frac{P(\{2\})}{P(\mathbb{N} \setminus \{1\})} \\
&= \frac{1}{\omega} \cdot \frac{1}{\omega - 1} = \frac{1}{\omega^2 - \omega}
\end{aligned}
$$

Problemini

Problem

Qual'è la probabilità che esca il numero 1, sapendo dall'oracolo che uscirà uno dei primi 10 numeri?

Problemini

Problem

Qual'è la probabilità che esca il numero 1, sapendo dall'oracolo che uscirà uno dei primi 10 numeri?

La probabilità condizionata $P(\{1\} \mid \{0,1,2,3,...,9\})$ è data da

$$P(\{1\} \mid \{0,1,2,3,...,9\}) = \frac{P(\{1\})}{P(\{0,1,2,3,...,9\})}$$

Problemini

Problem

Qual'è la probabilità che esca il numero 1, sapendo dall'oracolo che uscirà uno dei primi 10 numeri?

La probabilità condizionata $P(\{1\} \mid \{0, 1, 2, 3, ..., 9\})$ è data da

$$P(\{1\} \mid \{0, 1, 2, 3, ..., 9\}) = \frac{P(\{1\})}{P(\{0, 1, 2, 3, ..., 9\})} = \frac{\frac{1}{\omega}}{\frac{10}{\omega}}$$

Problemini

Problem

Qual'è la probabilità che esca il numero 1, sapendo dall'oracolo che uscirà uno dei primi 10 numeri?

La probabilità condizionata $P(\{1\} \mid \{0,1,2,3,...,9\})$ è data da

$$P(\{1\} \mid \{0,1,2,3,...,9\}) = \frac{P(\{1\})}{P(\{0,1,2,3,...,9\})} = \frac{\frac{1}{\omega}}{\frac{10}{\omega}} = \frac{1}{10}$$

Problemini

Problem

Qual'è la probabilità che esca il numero 1, sapendo dall'oracolo che uscirà uno dei primi 10 numeri?

La probabilità condizionata $P(\{1\} \mid \{0, 1, 2, 3, ..., 9\})$ è data da

$$P(\{1\} \mid \{0, 1, 2, 3, ..., 9\}) = \frac{P(\{1\})}{P(\{0, 1, 2, 3, ..., 9\})} = \frac{\frac{1}{\omega}}{\frac{10}{\omega}} = \frac{1}{10}$$

Si osservi che questo esempio suggerisce anche come si può trattare il problema del satellite:

$$\frac{0}{0} \text{ è proibito, ma } \frac{\frac{1}{\omega}}{\frac{10}{\omega}} \text{ è legittimo.}$$

Un semplice problema di elettrostatica

Sia Ω una scatola il cui contorno ha potenzale elettrostatico 0.

Sia Ω una scatola il cui contorno ha potenzale elettrostatico 0.

In Ω vi mettiamo un punto materiale carico P

Un semplice problema di elettrostatica

Sia Ω una scatola il cui contorno ha potenzale elettrostatico 0.

In Ω vi mettiamo un punto materiale carico P (che potrebbe modellizzare ad esempio un elettrone).

Un semplice problema di elettrostatica

Sia Ω una scatola il cui contorno ha potenzale elettrostatico 0.

In Ω vi mettiamo un punto materiale carico P (che potrebbe modellizzare ad esempio un elettrone).

Supponiamo che sia libero di muoversi.

Un semplice problema di elettrostatica

Sia Ω una scatola il cui contorno ha potenzale elettrostatico 0.

In Ω vi mettiamo un punto materiale carico P (che potrebbe modellizzare ad esempio un elettrone).

Supponiamo che sia libero di muoversi.

Vogliamo conoscere il punto P_0 che il punto materiale andrà ad occupare.

Modelizziamo il problema!!!

Dato il punto materiale $P \in \Omega$, si considera il problema di Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = \delta_P & \text{for } \ x \in \Omega \\ u(x) = 0 & \text{for } x \in \partial\Omega \end{cases}$$

ove u denota il potenziale elettrostatico

Modelizziamo il problema!!!

Dato il punto materiale $P \in \Omega$, si considera il problema di Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = \delta_P & \text{for } \ x \in \Omega \\ u(x) = 0 & \text{for } x \in \partial\Omega \end{cases}$$

ove u denota il potenziale elettrostatico
Denotiamo con u_P la soluzione del problema e con

$$E_{el}(u_P) = \langle \delta_P, \ u \rangle - \frac{1}{2} \int |\nabla u_P|^2 dx = \frac{1}{2} \int |\nabla u_P|^2 dx$$

la sua energia.

Modelizziamo il problema!!!

Dato il punto materiale $P \in \Omega$, si considera il problema di Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = \delta_P & \text{for } \ x \in \Omega \\ u(x) = 0 & \text{for } x \in \partial\Omega \end{cases}$$

ove u denota il potenziale elettrostatico
Denotiamo con u_P la soluzione del problema e con

$$E_{el}(u_P) = \langle \delta_P, \ u \rangle - \frac{1}{2} \int |\nabla u_P|^2 dx = \frac{1}{2} \int |\nabla u_P|^2 dx$$

la sua energia.
Il punto cercato P_0 è il punto che minimizza l'energia:

$$\min_{P \in \Omega} E_{el}(u_P)$$

Modelizziamo il problema!!!

Dato il punto materiale $P \in \Omega$, si considera il problema di Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = \delta_P & \text{for} \quad x \in \Omega \\ u(x) = 0 & \text{for } x \in \partial\Omega \end{cases}$$

ove u denota il potenziale elettrostatico
Denotiamo con u_P la soluzione del problema e con

$$E_{el}(u_P) = \langle \delta_P, \ u \rangle - \frac{1}{2} \int |\nabla u_P|^2 dx = \frac{1}{2} \int |\nabla u_P|^2 dx$$

la sua energia.
Il punto cercato P_0 è il punto che minimizza l'energia:

$$\min_{P \in \Omega} E_{el}(u_P)$$

Ma nella matematica archimedea, niente di tutto ciò ha senso poichè l'energia è $+\infty$ (o indefinita se $P \in \partial\Omega$).

Un po' di bibliografia

- Benci, V., *L'analisi infinitesimale mediante i numeri euclidei. Una introduzione elementare*, MatematicaMente, n.218,....,222, http://mathesisverona.it/Numeri/Nume218.pdf
- Benci, V., Freguglia, P. - *Alcune osservazioni sulla matematica non-archimedea*, Matem. Cultura e Soc., RUMI, 1 (2016), 105-122.
- Enriques F. (a cura di) *Questioni riguardanti le Matematiche Elementari, raccolte e coordinate da Federigo Enriques*, Parte prima, vol. I, terza edizione, Nicola Zanichelli editore, Bologna, 1923
- Sylvia Wenmackers - 1 2 3... Infinity! You Tube, https://youtu.be/QJuuKQBhenY

Grazie per la vostra attenzione!