ΖΉΝΩΝ Ὁ ἘΛΕΆΤΗΣ

In principio era Zenone di Elea

Di Paolo Bonavoglia 2017

Il primo e il terzo paradosso di Zenone

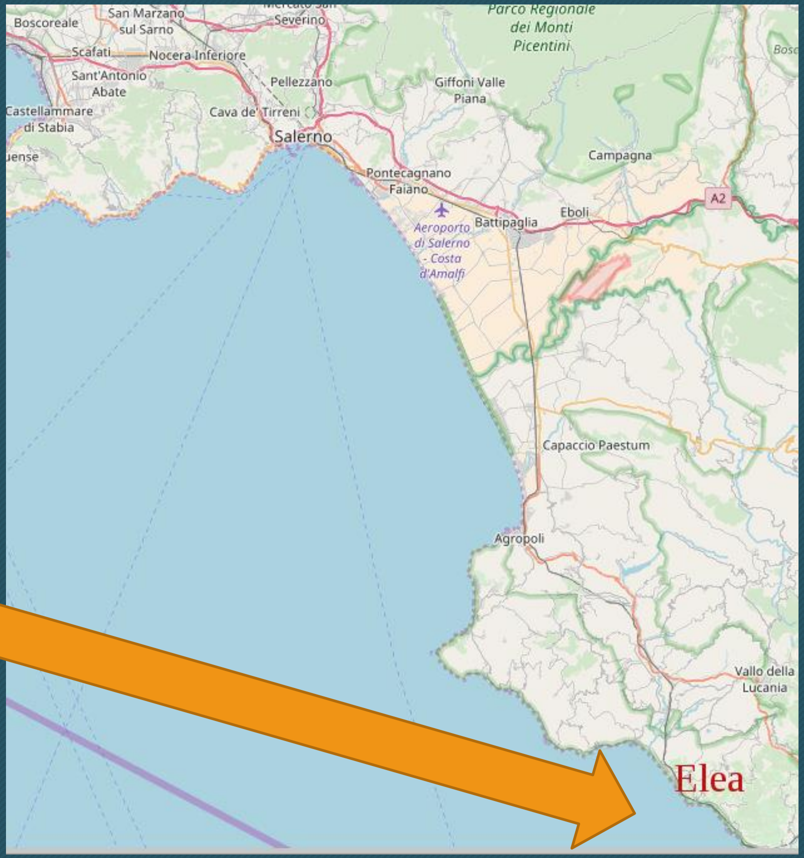
Alle radici del calcolo infinitesimale

Venezia 30-09-2017 Paolo Bonavoglia

Zenone di Elea, dove è Elea?

Grecia?
Asia Minore?

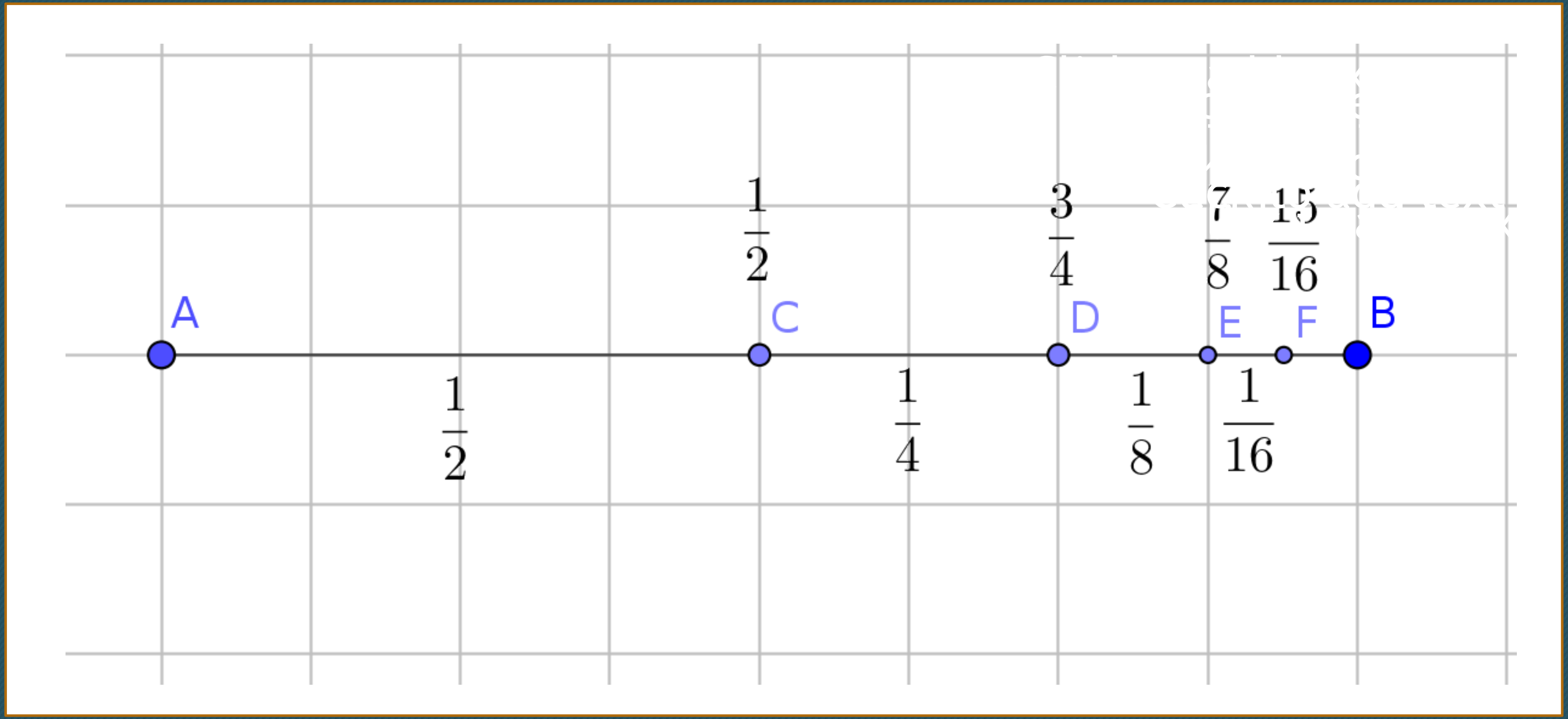
Elea, Magna Grecia?



Magna Grecia
Italia meridionale
Provincia di Salerno, sotto Eboli e Paestum
Oggi si chiama Velia

I paradosso: la dicotomia

Ci sono quattro argomenti di Zenone sul movimento che mettono in difficoltà chi tenta di risolverli.
Il primo riguarda l'inesistenza del movimento, perché il mobile prima di arrivare alla fine del tragitto deve passare per la metà di esso.   [Aristotele, *Fisica* VI.9]



Achille parte da A ma
non arriverà mai in B

Infatti deve prima raggiungere la metà di AB
Poi la metà del rimanente
E così via all'infinito

Achille non arriverà mai in B

Tra A e B ci sono infiniti punti …
Ma anche tra A e C

La dicotomia: enunciati alternativi

Achille non riesce neanche a partire

Infatti non può raggiungere la metà, e nemmeno il quarto e nemmeno l'ottavo ...

Non uscirò mai da questa aula

Infatti dovrò prima raggiungere la metà della distanza dalla porta, e poi metà del rimanente …

Questo convegno non avrà mai fine

Infatti, se mancano sette ore alla fine, dobbiamo prima arrivare a 3h30m dalla fine, poi a 1h45m …

La dicotomia: come si spiega?

Interpretazione fisica

non è possibile la suddivisione all'infinito (atomi, quanti)

Se Achille percorre spazi uguali in tempi uguali, il paradosso vale anche per il tempo …

Interpretazione geometrica

Un segmento non è un insieme di punti indivisibili (Aristotele)

La dicotomia aritmetica

Matematicamente è una questione di numeri

Tra due numeri razionali ce ne è sempre uno maggiore del primo e minore del secondo

Il paradosso piò descriversi con tre sequenze di numeri, che definiscono alcuni ***numeri iperreali***

Strada mancante ad Achille: $< 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16} \ldots > = \delta$ Numero iperreale infinitamente piccolo

Posizione di Achille: $< 0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16} \ldots > = \alpha$ Numero iperreale infinitamente vicino ad 1

Posizione di B : $< 1, 1, 1, 1, 1 \ldots > = 1$ Numero iperreale stabile = numero reale = 1

Ma gli iperreali possono dirsi numeri?

Per parlare di **numeri** occorre che abbia senso sommarli, moltiplicarli, confrontarli

I numeri del telefono in questo senso non sono numeri …

I numeri iperreali invece si possono sommare e moltiplicare facilmente, termine a termine

Strada mancante ad Achille: $< 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16} \ldots > = \delta$

Posizione di Achille: $< 0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16} \ldots > = \alpha$

Posizione di B: $< 1, 1, 1, 1, 1 \ldots > = 1$

Somma

$$\alpha + \delta = 1$$

Sottrazione

$$\alpha = 1 - \delta$$

Aritmetica iperreale: il confronto

Più problematico confrontare numeri; si usa una regola della maggioranza.

Esempio: $\alpha < 1$ infatti è $0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16} \ldots < 1,1,1,1,1 \ldots$ unanimità

Esempio: $\delta > 0$ infatti è $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16} \ldots > 0,0,0,0,0 \ldots$ unanimità

Esempio: $\delta < \frac{1}{4}$ infatti è $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16} \ldots < \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4} \ldots$ maggioranza infinita

(falsa per le prime 3, vera per tutte le altre)

E se capita infinito contro infinito? $0,1,0,1,0,1 \ldots < 1,0,1,0,1,0 \ldots$???

Ci vuole un insieme di regole: un ultrafiltro!

Il III paradosso, della freccia

Zenone sbaglia a ragionare quando sostiene che la freccia scagliata è immobile. […] Questo è falso perché il tempo come del resto ogni altra grandezza non si compone di istanti indivisibili

Fotografia ***istantanea*** di un aereo
l’aereo sembra proprio immobile

Il terzo è quello, appena menzionato, della freccia che, se pur scagliata sta ferma. Ma una siffatta conclusione dipende dall'assunzione che il tempo sia costituito da istanti: se non si concede questo il ragionamento non tiene. [Aristotele, *Fisica* VI.9]

Se l'istante ha durata indivisibile (zero) allora anche lo spostamento è zero e l'aereo è immobile.

III paradosso, ha senso lo zero come misura?

$\Delta t = 0 \rightarrow \Delta s = 0 \rightarrow$ l'aereo è immobile!

Ma nella foto ***istantanea*** …

in realtà è $\Delta\mathrm{t} = \frac{1}{800} sec$ e $\Delta s = 7\ cm$

Ma è possibile una foto veramente ***istantanea??***

Con $\Delta\mathrm{t} = 0\ sec$??

e $\Delta s = 0\ cm$??

(aereo immobile?)

Con $\Delta\mathrm{t} = 0\ sec$

La foto sarebbe assolutamente

buia, nera

Il III paradosso, della freccia

$\Delta t = 0 \rightarrow \Delta s = 0 \rightarrow$ velocità zero??

Peggio, la velocità:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{0}{0}$$

è indeterminata!

Il problema della velocità istantanea portò Newton a creare il calcolo infinitesimale.

Il problema equivale a quello della tangente a una curva, che portò a sua volta Leibniz a creare un calcolo infinitesimale equivalente a quello di Newton

Perché nell'istante non è possibile né muoversi né star fermi. [Aristotele, *Fisica* VI.8]

Infinitesimo al posto dello zero

Con Leibniz e Newton sostituiamo l'istante con un tempo ***infinitamente piccolo: dt*** (***infinitesimo)*** tale che:

$$\mathbf{0 < dt < \frac{1}{N}}$$

e uno spazio percorso ***infinitamente piccolo: ds***

$$0 < ds < \frac{1}{N}$$

E ammettiamo che per questi numeri infinitesimi si conservino le ordinarie regole dell'algebra (Principio di estensione *Transfer Principle*)

Allora la velocità istantanea è:

$$v = \frac{ds}{dt}$$

E, se si conosce la legge oraria (la funzione) si può calcolare con le regole dell'algebra

Questi infinitesimi sono gli stessi visti prima?

Definiti i due numeri iperreali fondamentali:

$$\omega = < 1, 2, 3, 4, 5 \ldots >$$
$$\varepsilon = < 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5} \ldots > \; = \frac{1}{\omega}$$

$\varepsilon > 0$ infatti è $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5} \ldots \; > 0,0,0,0,0 \; \ldots$ unanimità

$\varepsilon < \frac{1}{N}$ infatti è $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \ldots \; \frac{1}{N} \; \ldots < \frac{1}{N}, \frac{1}{N}, \frac{1}{N}, \frac{1}{N}, \frac{1}{N} \ldots$ maggioranza infinita

Ma esistono veramente i numeri iperreali?

Nel mondo reale non esistono grandezze infinitamente piccole o infinitamente grandi, quindi che non hanno significato!
Ma nel mondo reale nessuna distanza, nessun intervallo di tempo sarà mai esattamente radice di due, o uno, o due …

Se si accettano i numeri reali … non c'è motivo di dire di no agli iperreali.

Se si accetta l'esistenza di radice di due, perché non accettare anche quella di omega ed epsilon?

Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk.

I numeri interi li ha creati il buon Dio, tutto il resto è opera dell'uomo.

Insomma, se ci siamo abituati a cose strane come numeri negativi, numeri irrazionali, numeri immaginari, non c'è motivo di rifiutare i numeri iperreali

Grazie per l’attenzione!

Il seguito qui: [Calcolo infinitesimale NSA]

Aristotele, *Fisica*, vol. VI.9