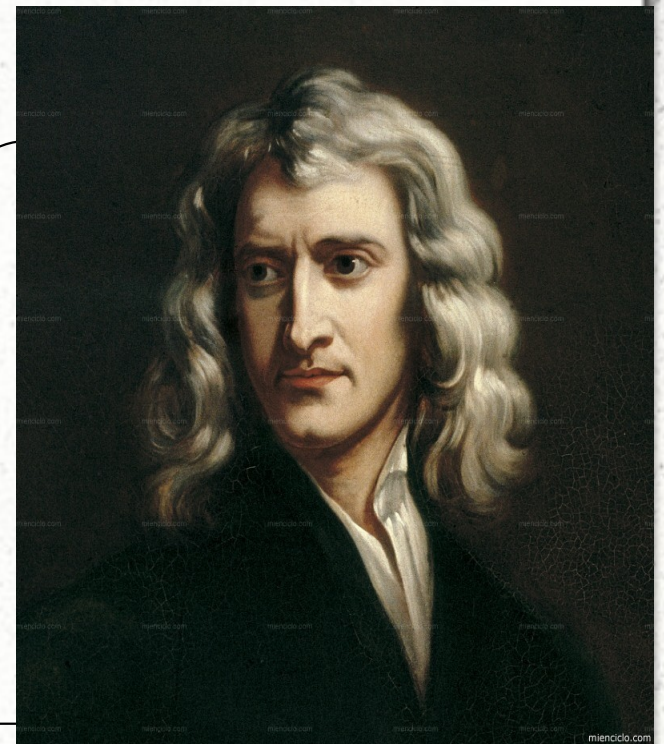
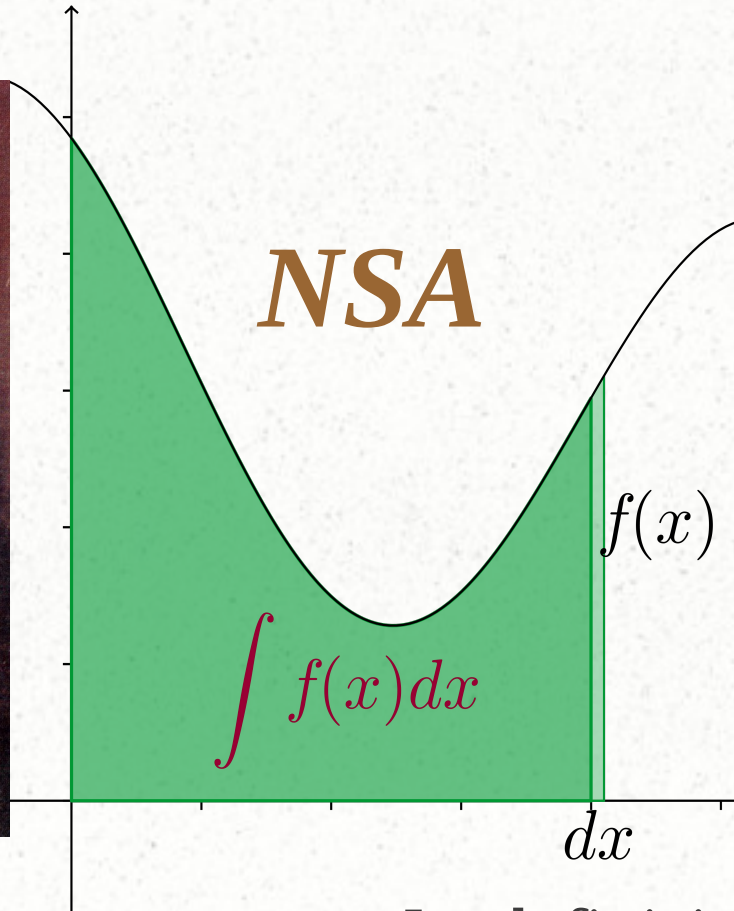


Primi passi tra gli integrali



Paolo Bonavoglia

Venezia 29 set 2013



- La definizione di integrale
- Il teorema fondamentale

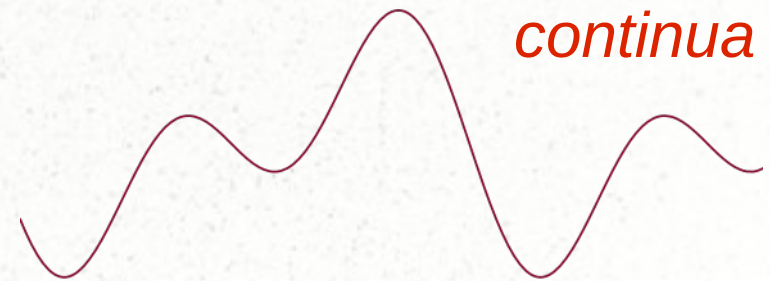
L'integrale nei programmi di matematica dei licei

- *Liceo Classico, Liceo delle Scienze umane. Liceo Linguistico, Liceo Artistico (tutti gli indirizzi), Liceo Musicale e Coreutico*
-
- Principali concetti del calcolo infinitesimale – in particolare la continuità, la derivabilità e l'integrabilità – anche in relazione con le problematiche in cui sono nati (velocità istantanea in meccanica, tangente di una curva, calcolo di aree e volumi). Le tecniche del calcolo vanno limitate alla capacità di derivare funzioni già note, semplici prodotti, quozienti e composizioni di funzioni, funzioni razionali e *alla capacità di integrare funzioni polinomiali intere e altre funzioni elementari e di determinare aree e volumi in casi semplici.*

Premessa 1: la continuità

Nel seguito parleremo di funzioni continue, ma cosa si intende per *continua*?

Con la NSA la definizione è semplice.



prima definizione (intuitiva):

una funzione il cui grafico si può disegnare senza mai staccare la matita dalla carta.

seconda definizione (più rigorosa):

ad ogni incremento infinitesimo di x

deve corrispondere un incremento infinitesimo di y

$$x_0 \simeq x_1 \rightarrow f(x_0) \simeq f(x_1)$$

discontinua

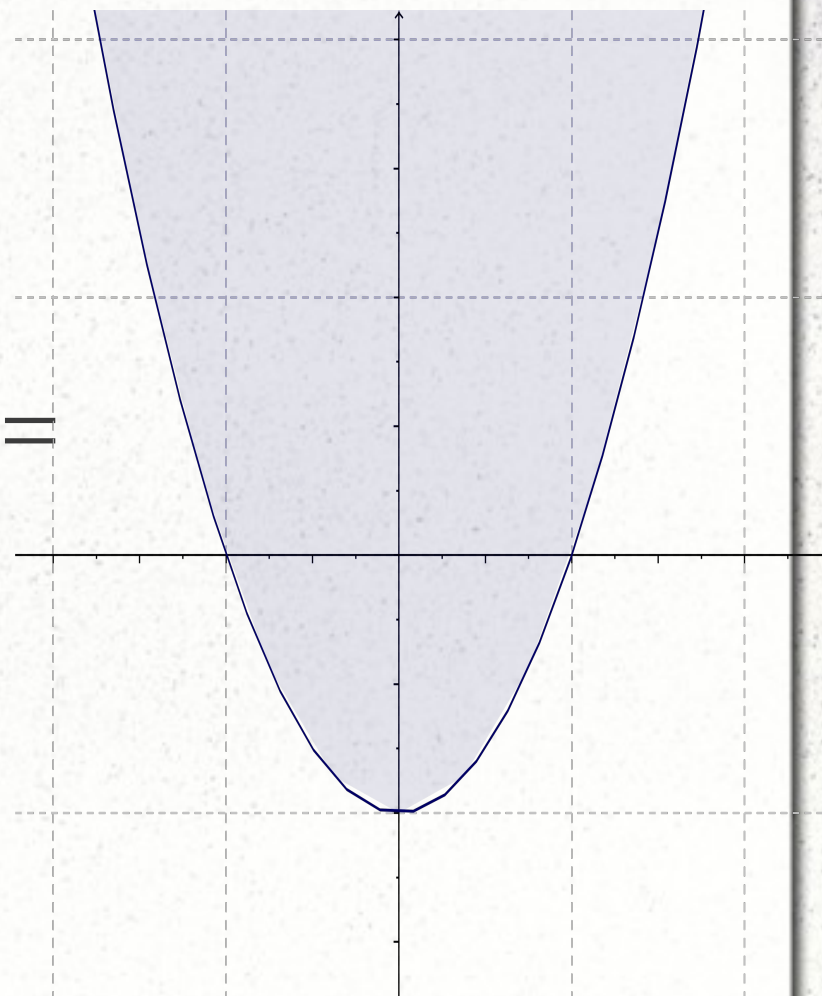
$$\text{st}(x_1 - x_0) = 0 \rightarrow \text{st}(f(x_1) - f(x_0)) = 0$$

Continuità ...

$$f(x) = x^2 - 1$$

$$\begin{aligned} st \left((x+dx)^2 - 1 - (x^2 - 1) \right) &= \\ st \left(dx^2 - 2dx + dx^2 - 1 - x^2 + 1 \right) &= \\ st \left(2dx + dx^2 \right) &= 0 \end{aligned}$$

La funzione è continua per ogni x



... e discontinuità

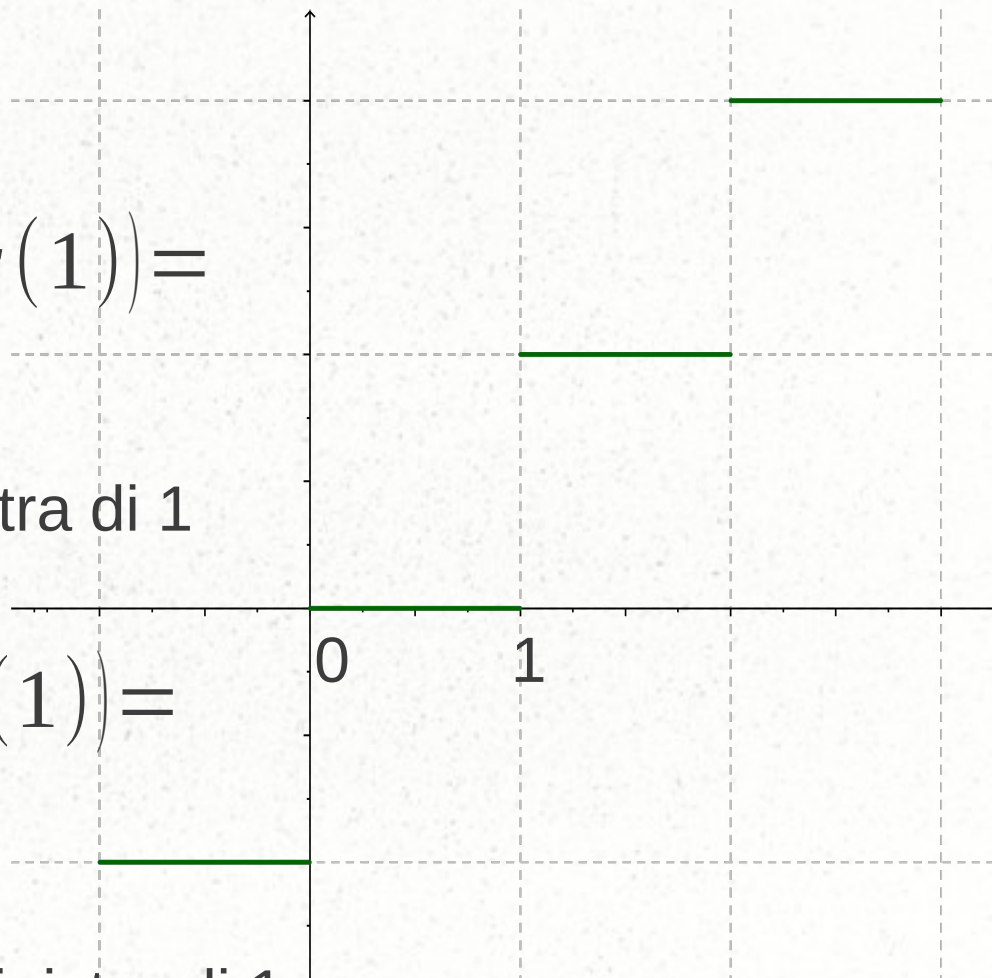
$$f(x) = \text{floor}(x)$$

$$\begin{aligned} st(\text{floor}(1+dx) - \text{floor}(1)) &= \\ st(1-1) &= 0 \end{aligned}$$

La funzione è continua a destra di 1

$$\begin{aligned} st(\text{floor}(1-dx) - \text{floor}(1)) &= \\ st(0-1) &= -1 \end{aligned}$$

La funzione è discontinua a sinistra di 1



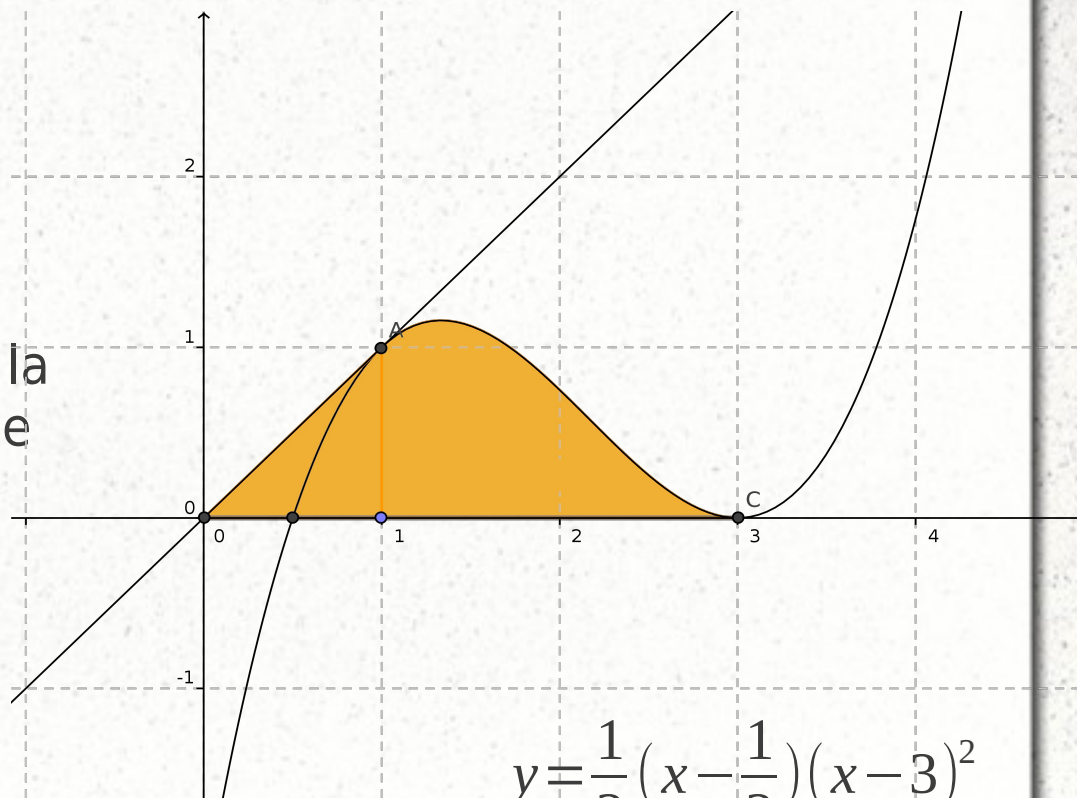
Maturità scientifica 1982

Un problema di integrali

Trovare la cubica per $A(1;1)$ e $C(3;0)$ che abbia $m=1$ in A ed $m=0$ in C

Trovare poi l'area compresa tra la cubica, la tangente in A , e l'asse delle x .

$$Area = \frac{1}{2} + \frac{4}{3} = \frac{11}{6} \approx 1,8333...$$



$$y = \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{2}\right) (x - 3)^2$$

$$y = \frac{1}{2} x^3 - \frac{13}{4} x^2 + 6x - \frac{9}{4}$$

Maturità scientifica 1982

Strani risultati

Risultati tipici nelle prove scritte

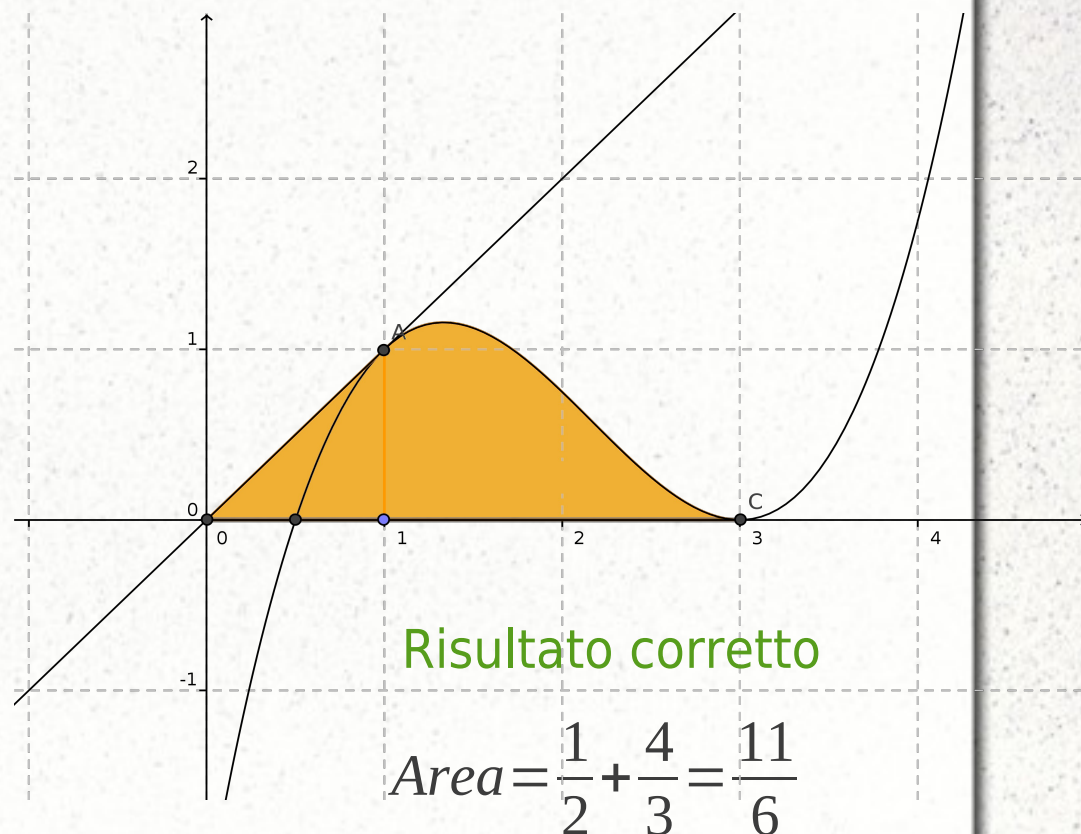
$$Area = \frac{7420}{3} ! ?$$

$$Area = \frac{821}{6} ! ?$$

Errori nel calcolo delle frazioni?
Possibile, probabile,

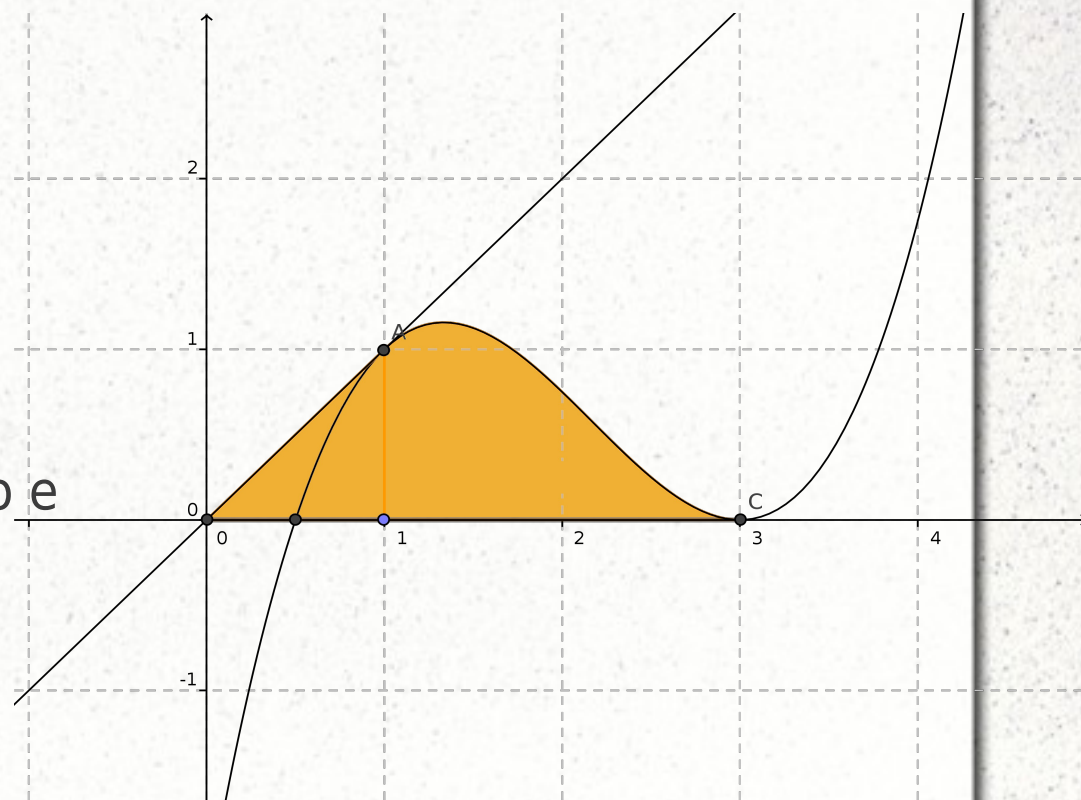
ma la domanda chiave è:

Dal disegno risulta un'area di uno-due quadretti, le sembra possibile un risultato simile?



Perché queste difficoltà?

1. Studenti abituati a **calcolare molto e ragionare poco.**
2. Difficoltà a **leggere grafici e diagrammi.**
3. Integrali **fatti a fine anno**, poco e in fretta.



Ma chi ha detto che ...?

- Ma chi ha detto che gli integrali debbano per forza essere trattati alla fine del programma di analisi?
-
- Gli integrali sono lo strumento più antico dell'analisi (Archimede)
-
- Gli integrali sono per molti versi lo strumento più semplice dell'analisi (somma, area)
-

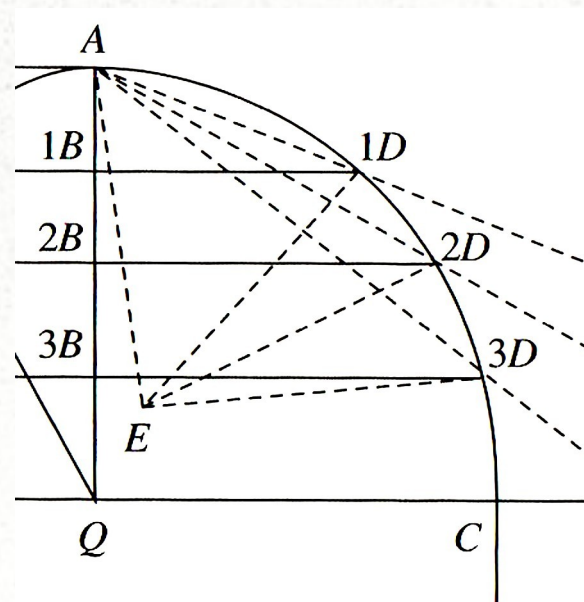
Leibniz e le quadrature

A chiarimento: sia la figura AQCDA; tracciate le rette parallele BD è possibile risolverla nei trapezi 1B 2D; 2B 3D ecc. Ma tracciate le rette convergenti ED può venir risolta nei triangoli E 1D 2D, E 2D 3D ecc

(Lettera di Leibniz a Oldenburg, 27 agosto 1676, da trasmettere a Newton)

Leibniz espone qui il suo metodo [...] molto più prolissamente di quanto la sua nuova analisi gli avrebbe consentito di fare. Ne consegue che fino a quel momento non aveva ancora trovato questa nuova analisi.

(Recensio libri 1715 attribuita ad Isaac Newton)



La regola dei trapezi

L'area di una figura piana chiusa può essere approssimata tracciando $n+1$ rette parallele e sommando le aree degli n trapezi così formatisi.

$$A = \frac{((b_0 + b_1) + (b_1 + b_2) + \dots + (b_{n-1} + b_n))h}{2}$$

$$A = \frac{h}{2} (b_0 + 2b_1 + 2b_2 + \dots + 2b_{n-1} + b_n)$$

$$A = h \left(\frac{b_0}{2} + b_1 + \dots + b_{n-1} + \frac{b_n}{2} \right)$$

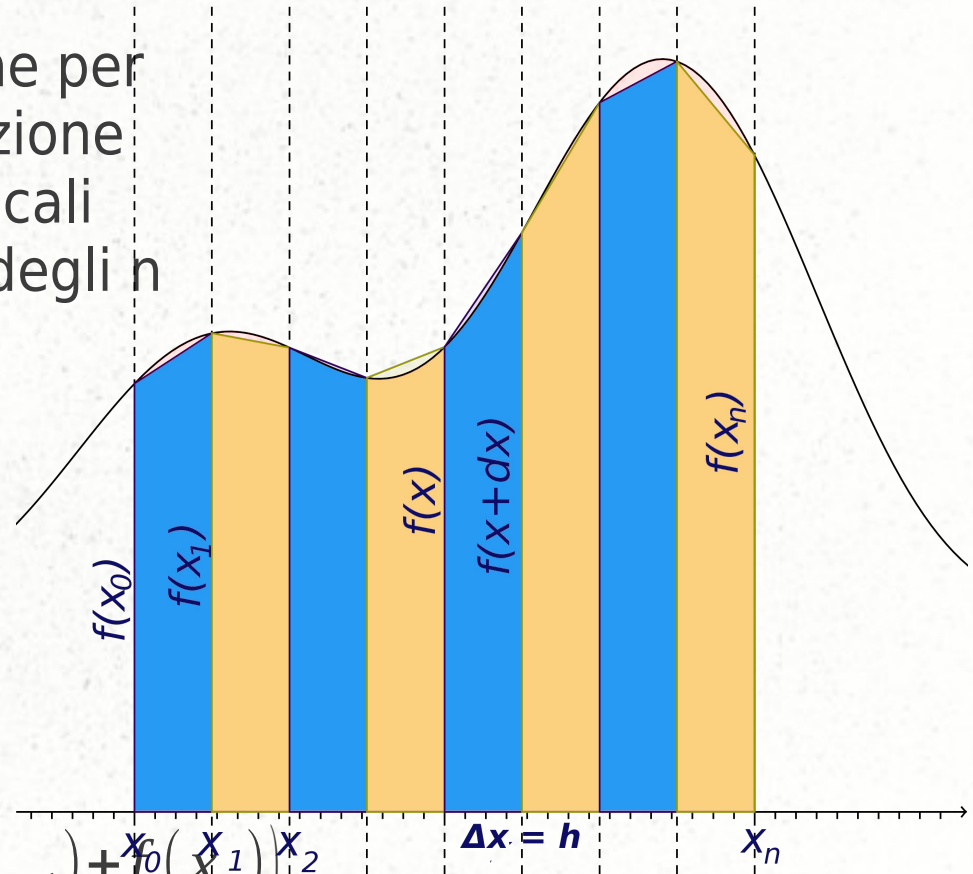


Per n molto grande l'area equivale a quella di una somma di rettangoli:

$$A \approx \sum (h b_i)$$

L'area sotto una funzione

La regola dei trapezi è utile anche per calcolare l'area sottesa alla funzione $f(x)$; tracciando $n+1$ rette verticali equidistanti si sommano le aree degli n trapezi così formatisi.



$$A = \frac{\sum (f(x) + f(x + \Delta x)) \Delta x}{2}$$

$$A = \frac{h}{2} (f(x_0) + 2f(x_1) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n))$$

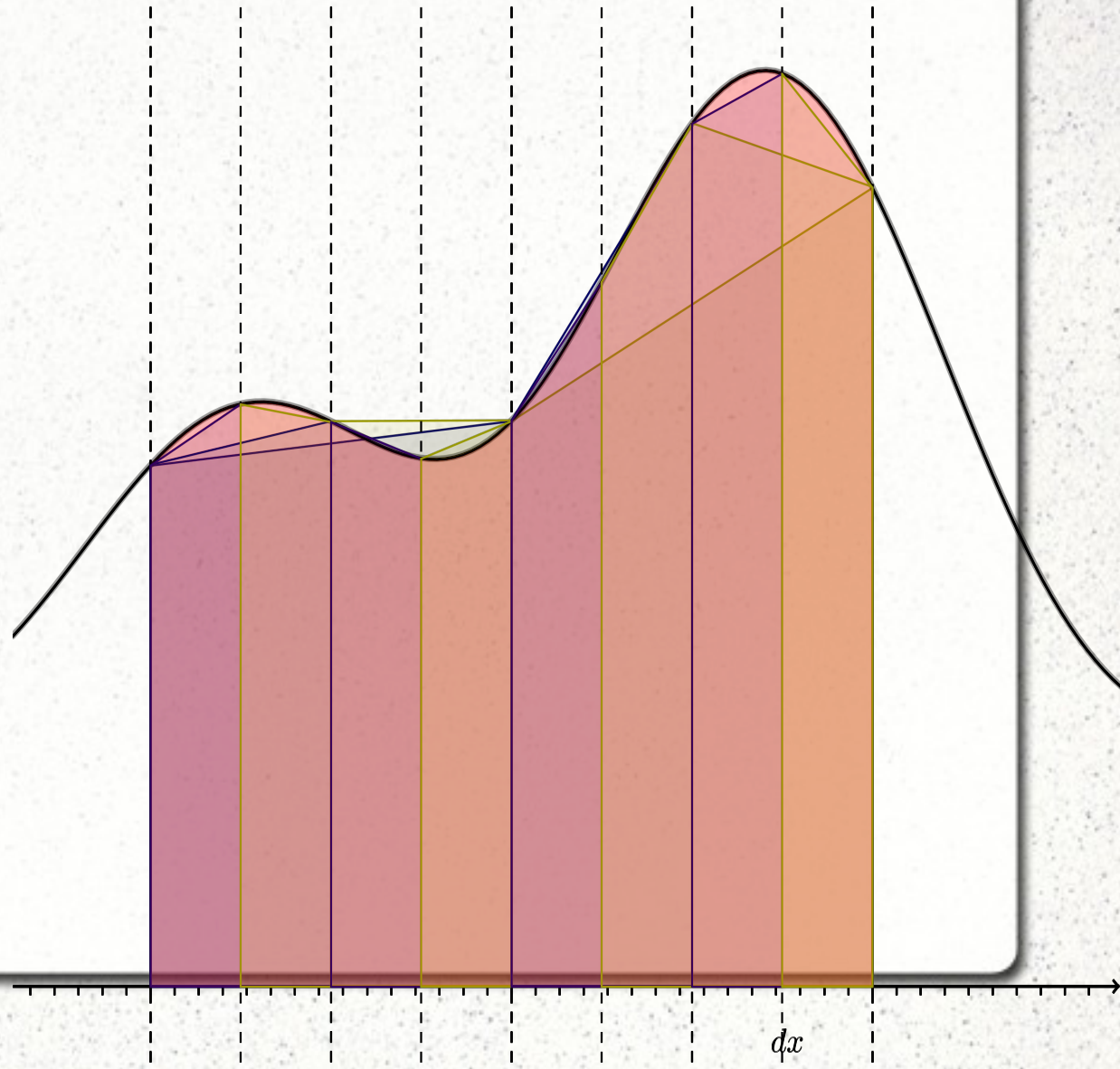
$$A = h \left(f \frac{(x_0)}{2} + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1}) + f \frac{(x_n)}{2} \right)$$

$$A \approx \sum (\Delta x f(x))$$

La regola dei trapezi converge

*Dividendo la figura in 2
trapezi l'errore è
notevole;
Dividendola in 4 è
minore
Dividendola in 8 è
ancora minore*

...



E se i trapezi sono infiniti?

Se il numero N di trapezi è: $N = 1, 2, 4, 8 \dots$

l'altezza dei trapezi è: $\Delta x = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8} \dots$

Con un numero di trapezi infinito la regola sarebbe esatta.

All'infinito si ottengono due **numeri iperreali**,
 ω infinitamente grande (in effetti un **ipernaturale**)
 ε infinitamente piccolo

$$\omega = \left\langle 1, 2, 4, 8 \dots 2^n \dots \right\rangle$$

$$dx = \left\langle 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8} \dots \frac{1}{2^n} \dots \right\rangle$$

Diversamente infiniti

In effetti possiamo usare diversi numeri iperreali :

$$\omega = \langle 1, 2, 3, 4, 5 \dots n \dots \rangle$$
$$dx = \left\langle 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \dots \frac{1}{n} \dots \right\rangle$$

oppure

$$\omega = \langle 1, 4, 9, 16, 25 \dots n \dots \rangle$$
$$dx = \left\langle 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16} \dots \frac{1}{n^2} \dots \right\rangle$$

L'area ottenuta è *ovviamente* la stessa e lo sarebbe anche nel caso più generale di trapezi di altezze diverse.

La definizione di integrale definito

L'area del singolo rettangolino infinitesimo è $f(x) \cdot dx$
(altezza $\times$ base)

La somma delle infinite aree è allora

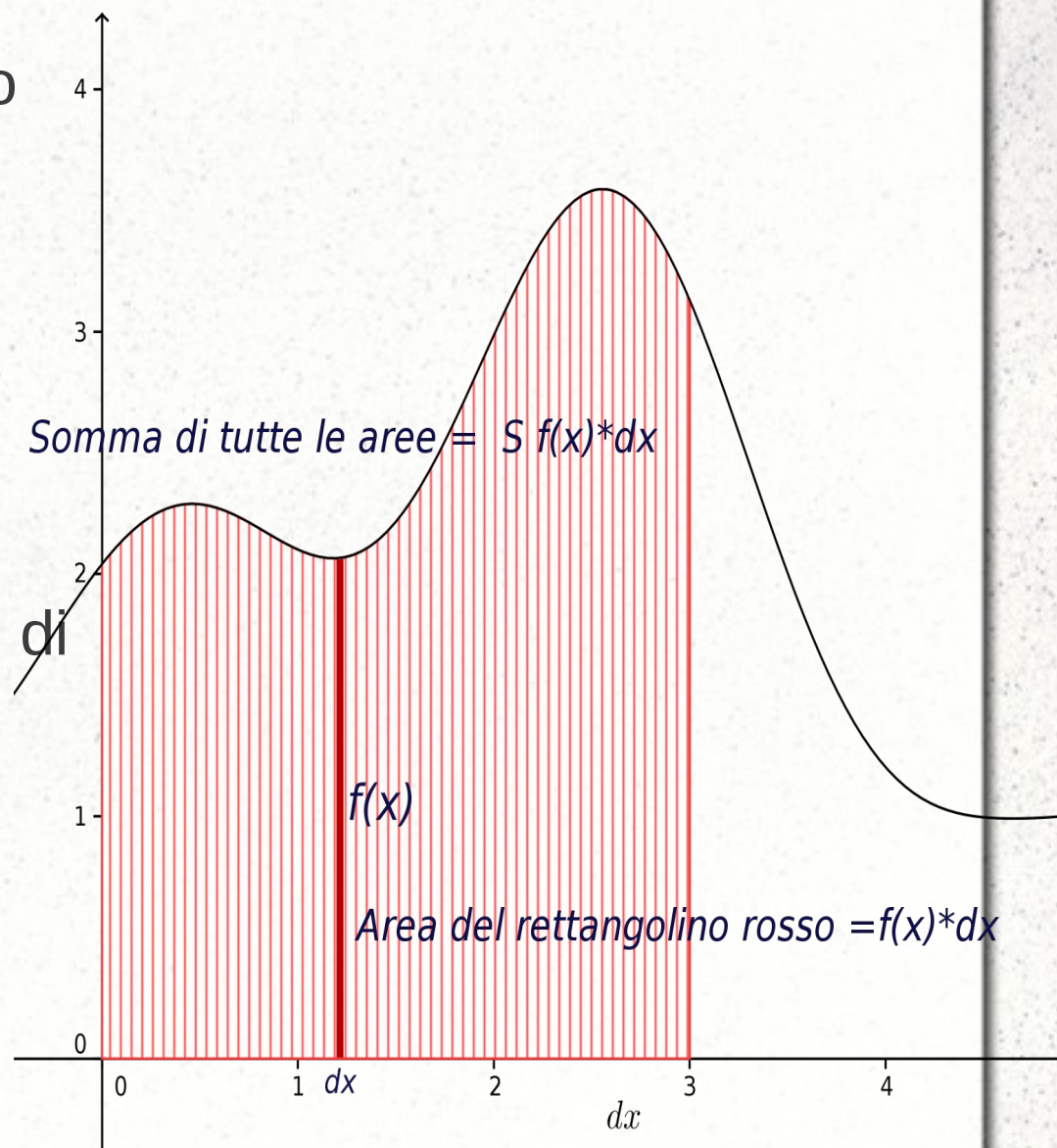
$$\text{Area} = \sum f(x) dx$$

Leibniz stilizza la S nel simbolo di integrale ancor oggi usato:

$$\text{Area} = \int f(x) dx$$

Questa somma di infiniti rettangoli infinitesimi prende il nome di

Integrale definito



Rettangoli o trapezi?

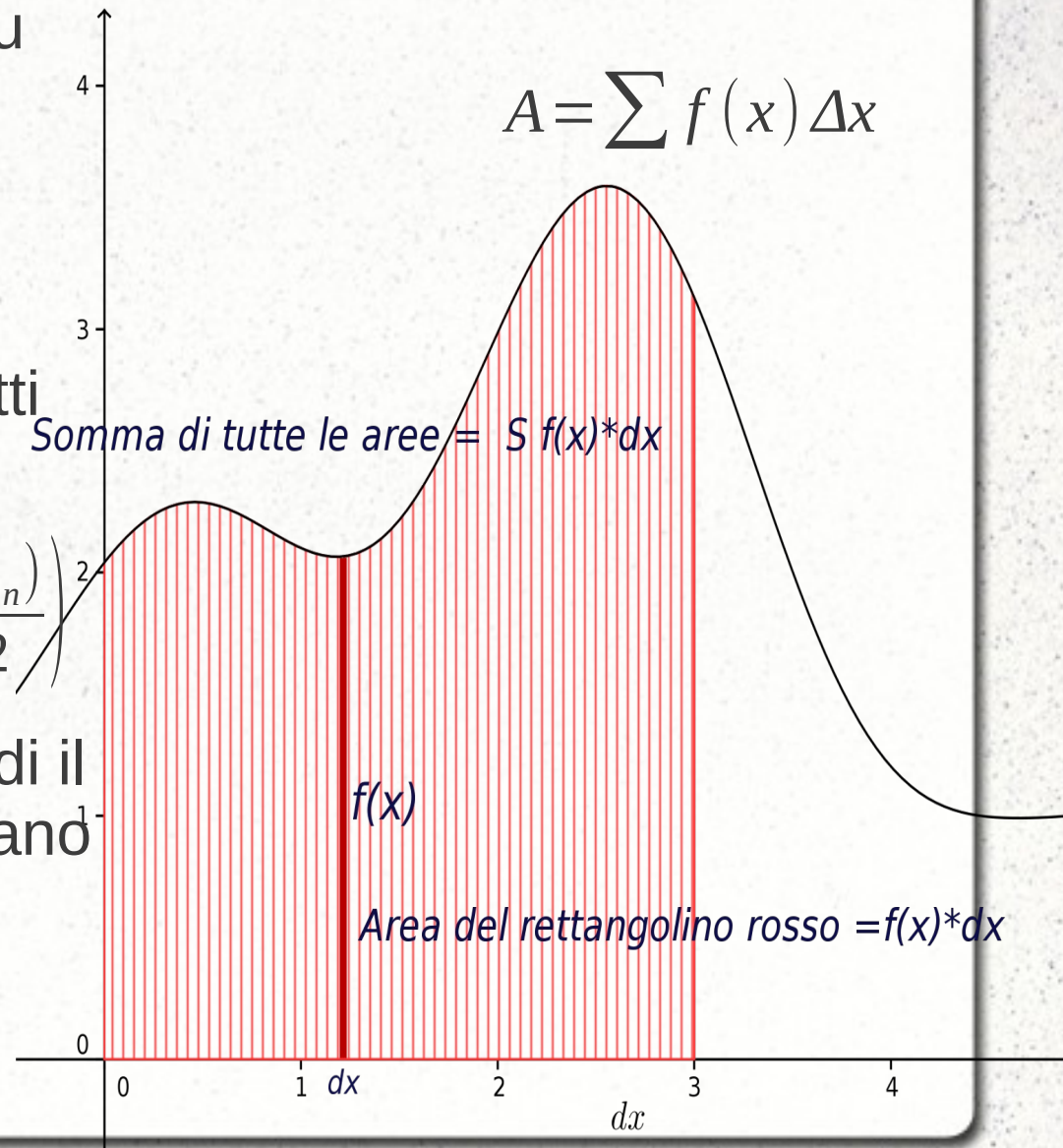
L'integrale di Leibniz si basa su $f(x)dx$ area del rettangolino Infinitesimo.

E se si usano i trapezi?

In effetti non cambia nulla, infatti prendendo la seconda formula:

$$A = h \left(f\left(\frac{x_0}{2}\right) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1}) + f\left(\frac{x_n}{2}\right) \right)$$

Se consideriamo infiniti addendi il primo e l'ultimo termine diventano trascurabili e quindi si tratta ancora di una somma di rettangoli



Verso il teorema fondamentale

L'area sottesa a una funzione $f(x)$ è a sua volta una funzione che indicheremo con

$$A = F(x)$$

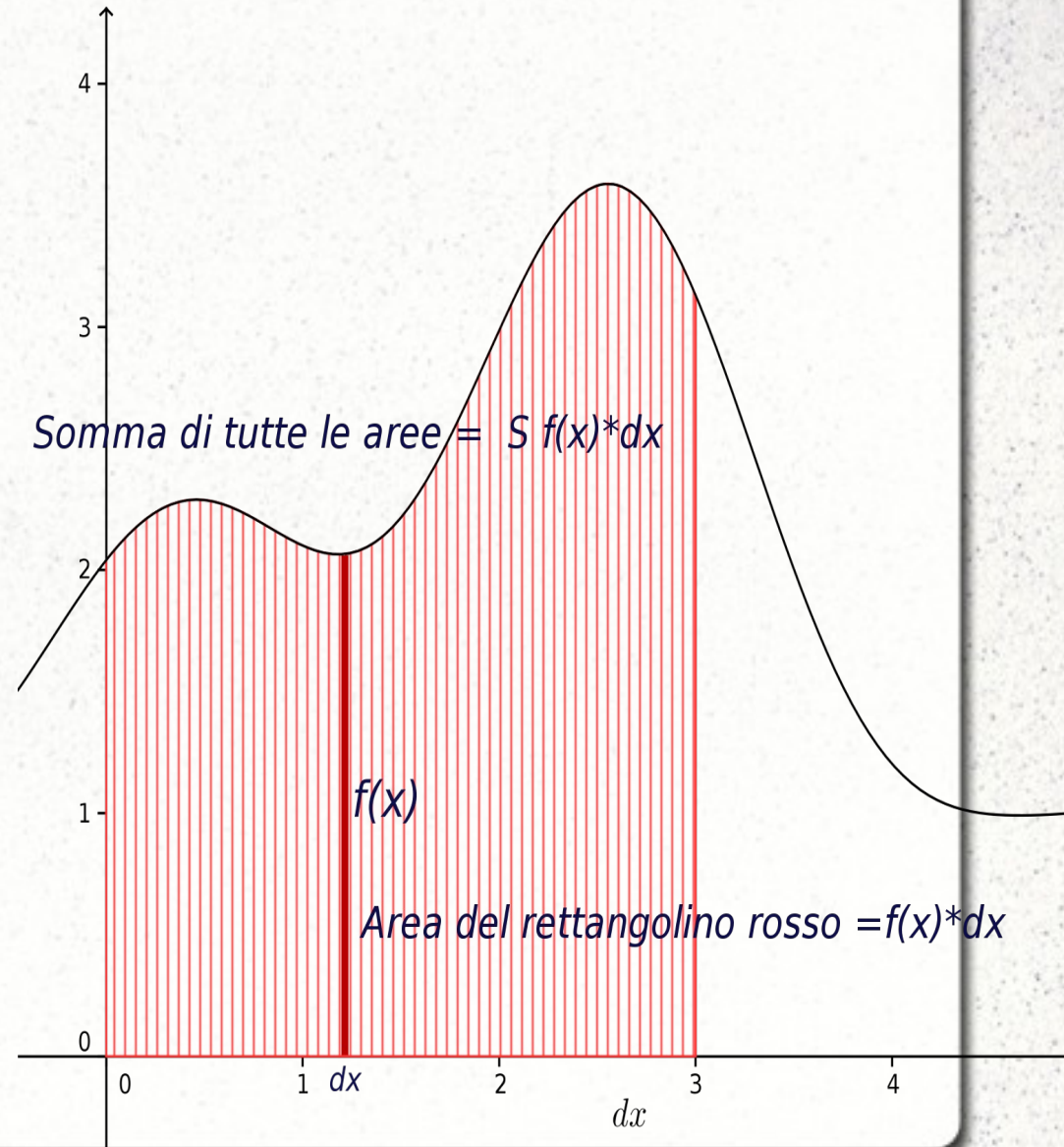
Intendendo così l'area compresa tra la curva, gli assi cartesiani e la retta verticale di ascissa x .

In sostanza è:

$$F(x) = \int f(x) dx$$

o anche

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt$$



Il teorema fondamentale dell'Analisi

(dimostrazione intuitiva)

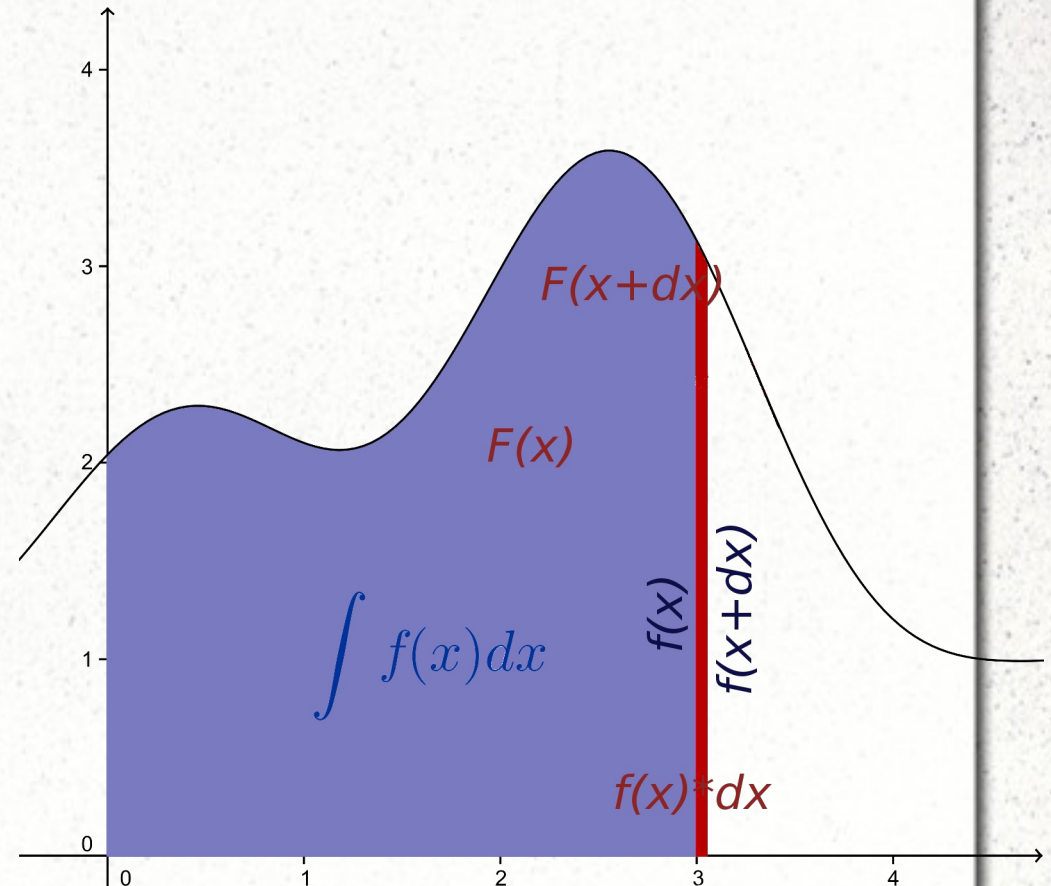
L'incremento infinitesimo
della funzione area è
 $F(x+dx)-F(x)$
ed è **infinitamente vicino**
all'area del rettangolino
infinitesimo

$$F(x+dx) - F(x) \simeq f(x) dx$$

Quindi la derivata di $F(x)$ è

$$D_x F(x) = \lim_{dx \rightarrow 0} \left(\frac{F(x+dx) - F(x)}{dx} \right) \simeq \frac{f(x) dx}{dx} = f(x)$$

**La derivata della funzione area $F(x)$ è
la funzione primitiva $f(x)$**



Rovesciando il discorso

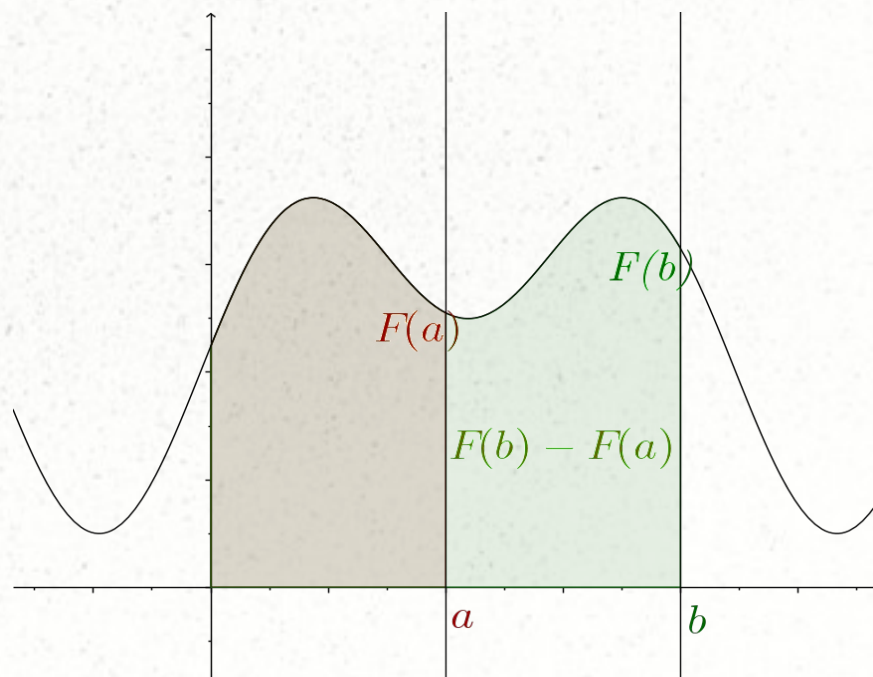
L'integrale indefinito per definizione è l'operazione inversa della derivata

$$\int f(x) = F(x) \Leftrightarrow D_x F(x) = f(x)$$

Il teorema fondamentale ci dice quindi che $F(x)$ è un integrale indefinito di $f(x)$.

Si perviene allora alla classica formula dell'integrale definito, L'area sotto la curva $f(x)$ compresa tra a e b è:

$$\int_a^b f(x) = F(b) - F(a)$$



Il teorema fondamentale dell'Analisi

(obiezione n.1)

Come già notato dallo stesso Leibniz non fa differenza che le aree infinitesime siano rettangoli o trapezi.

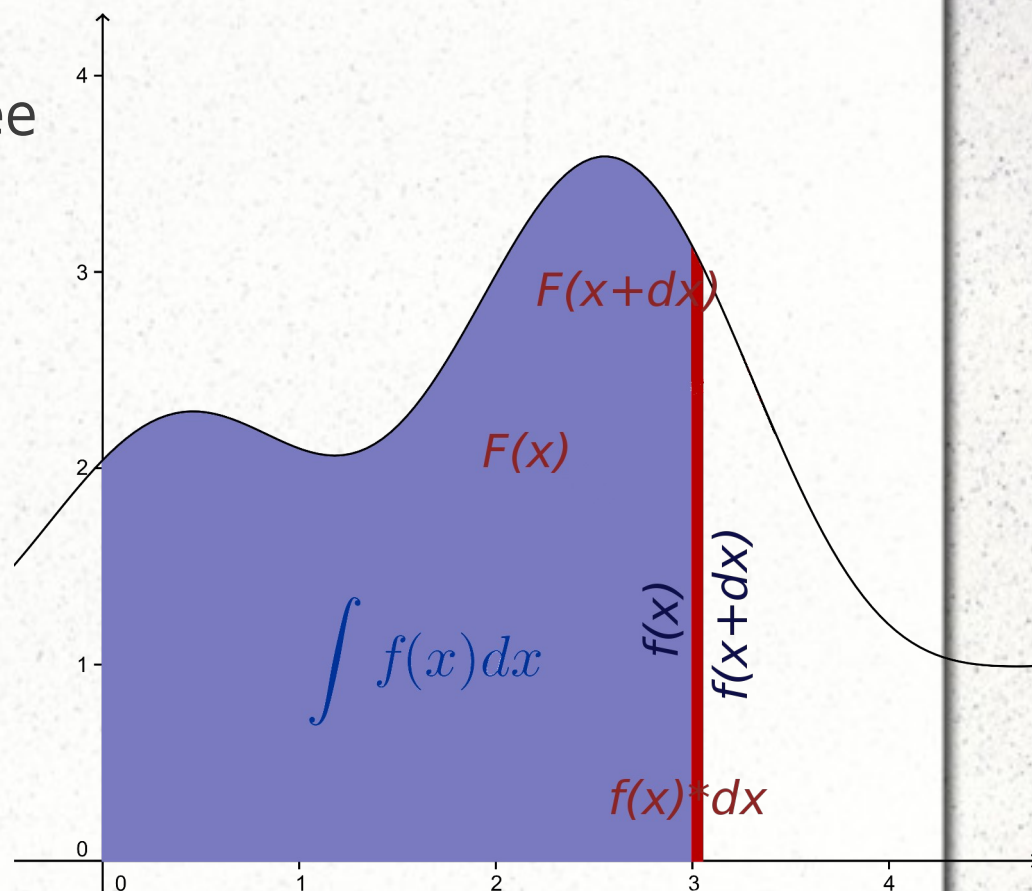
Questo vale anche per il teorema fondamentale.

L'area del trapezio infinitesimo è:

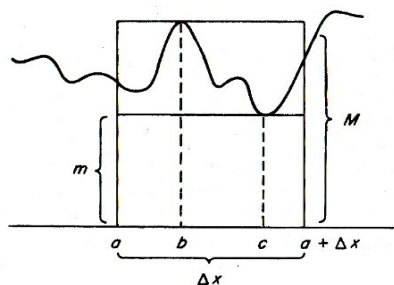
$$\frac{(f(x) + f(x+dx)) dx}{2}$$

E il teorema si ricava in modo leggermente più lungo:

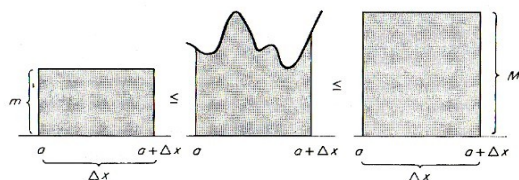
$$D_x F(x) = \lim_{dx \rightarrow 0} \left(\frac{(f(x) + f(x+dx)) dx}{2 dx} \right) = \left(\frac{2f(x)}{2} \right) = f(x)$$



Il teorema fondamentale dell'Analisi



that is,



The quotation at the head of this chapter is taken from the *Confessions* of St. Augustine. After his reform and conversion to Christianity, St. Augustine had little good to say of his youthful pursuits and companions. He was particularly rough on mathematicians:

The good Christian should beware of mathematicians and all those who make empty prophecies. The danger already exists that the mathematicians have made a covenant with the Devil to darken the spirit and to confine man in the bonds of Hell . . .

The Fundamental Theorem was discovered independently by a number of mathematicians who by and large did not realize its true importance. Gregory published it in geometric form in 1668. Isaac Barrow, Newton's teacher, proved it for monotonic functions at about the same time. Torricelli (1608–1647)

Since H is a primitive of f , this becomes

$$m \Delta x \leq H(a + \Delta x) - H(a) \leq M \Delta x$$

or

$$f(c) \leq \frac{H(a + \Delta x) - H(a)}{\Delta x} \leq f(b).$$

We have just shown that “for all $\Delta x < 0$ there exist b and c in the interval $[a, a + \Delta x]$ such that

$$f(c) \leq \frac{H(a + \Delta x) - H(a)}{\Delta x} \leq f(b).”$$

Since this sentence is true in $\mathbf{R}$ and can be written in our language L , it must also be true in $\mathbf{IR}$. Thus, for any infinitesimal $\Delta x > 0$, there exist b, c in $[a, a + \Delta x]$ such that

$$f(c) \leq \frac{H(a + \Delta x) - H(a)}{\Delta x} \leq f(b).$$

La maggior parte dei testi di analisi, anche NSA, riportano una dimostrazione molto più complessa, come quella accanto, copia della pag. 79 di ***Infinitesimal Calculus*** di Henle e Kleinberg.

Perché?

Il teorema fondamentale dell'Analisi

(obiezione n.2)

Perché l'area grigia non è un trapezio, un lato è curvilineo, quindi come facciamo ad essere sicuri che ...

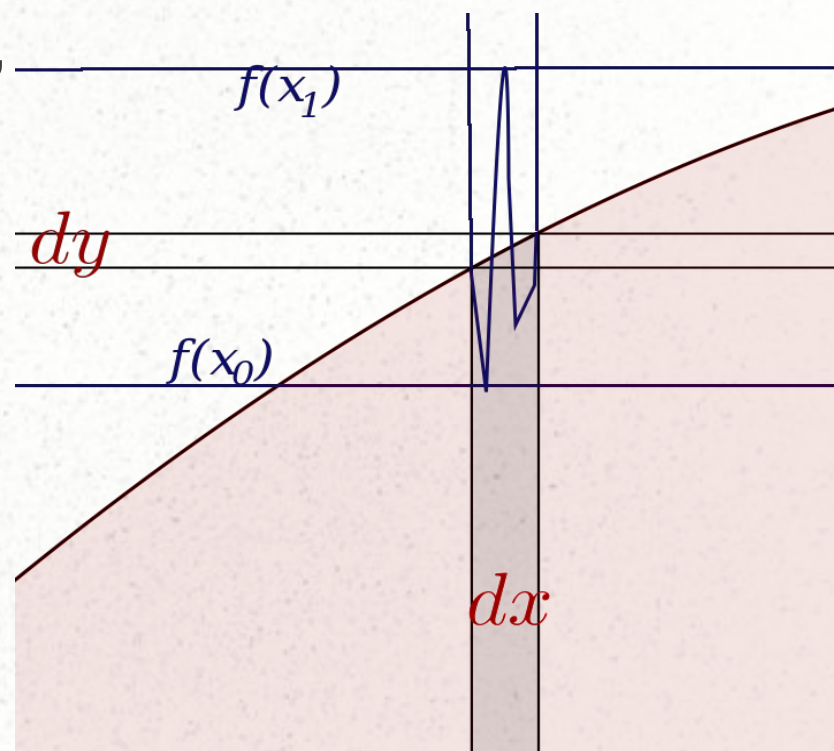
$$F(x+dx) - F(x) \simeq f(x) dx ?$$

detti $f(x_0)$ ed $f(x_1)$ i valori minimo e massimo di $f(x)$ tra x ed $x + dx$

$$f(x_0) dx \leq F(x+dx) - F(x) \leq f(x_1) dx$$

Ma $f(x)$ è continua e quindi ...

$$x_0 \simeq x_1 \simeq x \rightarrow f(x_0) \simeq f(x_1) \simeq f(x)$$



Ovvio!

se $f(x)$ è continua tutte le y qui differiscono da $f(x)$ di un infinitesimo.

Quanto rigore?

- Il lavoro di aritmetizzazione dell'analisi completato soprattutto da Weierstrass tende a escludere l'intuizione e in particolare quella visiva che può trarre in inganno.
- Così un teorema come questo può dimostrarsi senza alcun riferimento al disegno.
- Ma didatticamente fino a che punto è necessario questo tipo di rigore?

Bibliografia

- Robert Goldblatt, *Lectures on the Hyperreals*, Springer 1991-1998. chap. 9 *The Riemann Integral*
- J. Henle E.Kleinberg, *Infinitesimal Calculus*, Dover 1979-2003, chap. 6 *Integral Calculus*