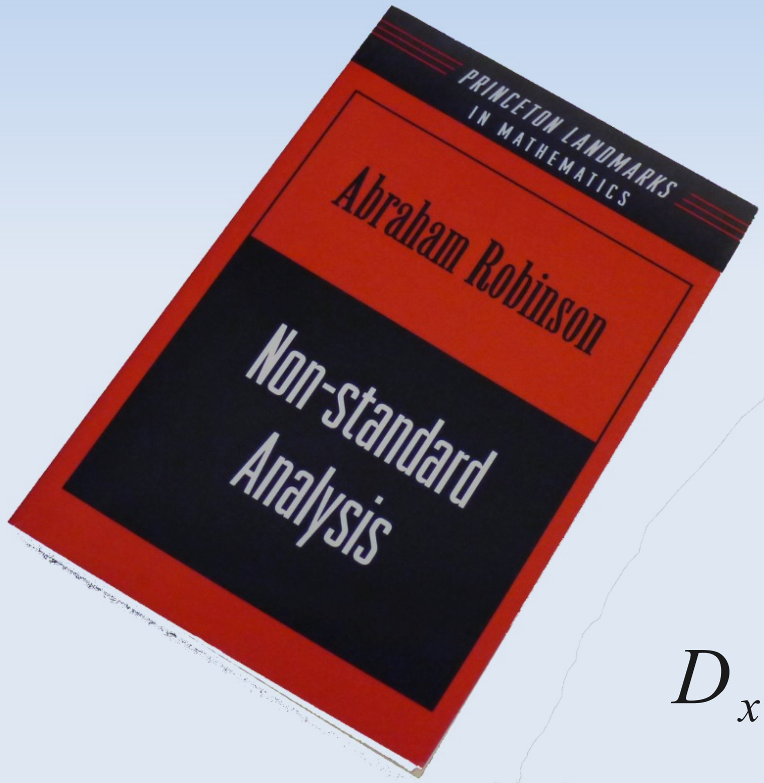
Il ritorno dell'infinitesimo

- di Paolo Bonavoglia



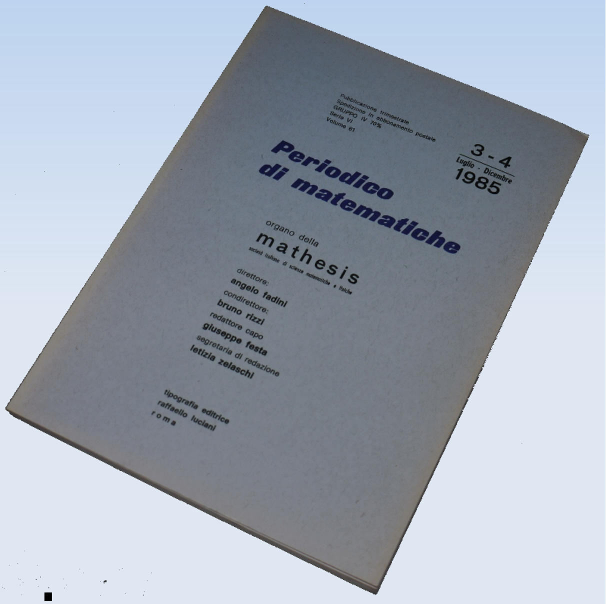
$$\frac{dx^2}{dx}=2x$$

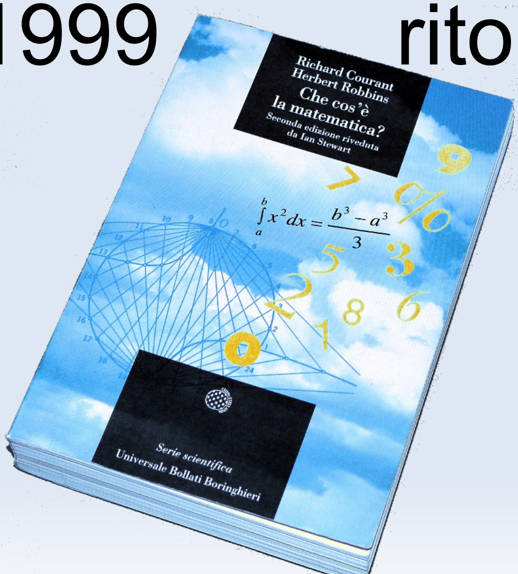
$$D_x x^2 = st\left(\frac{(x+dx)^2-x^2}{dx}\right)$$

- *Giornata di studio Analisi NSA* – Venezia 20-11-2011

Come ho scoperto la NSA

- 1982-86 matematica in un liceo sperimentale
- 1985-86 articoli Mathesis sulla NSA
- 1986-87 statistica (ITIS)
- 1987-94 informatica (ITIS)
- 1994 … ritorno al liceo
- 1999 ritorno all'analisi in un classico





Il problema della tangente

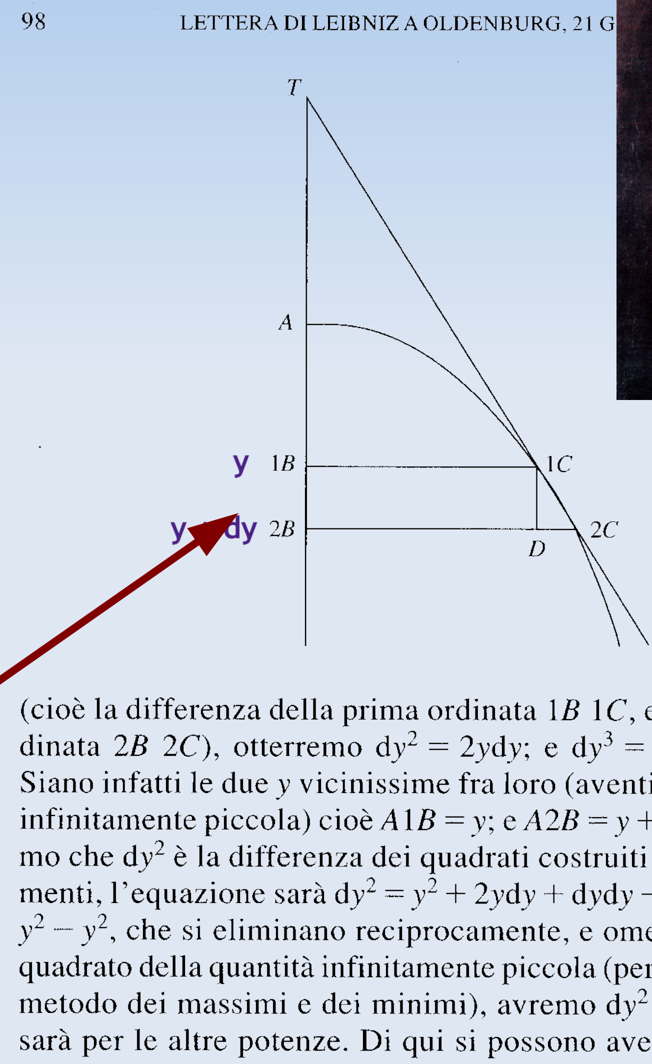
La geometria analitica di Cartesio non ha un metodo generale per trovare le tangenti a una qualsiasi curva.

$$per\ la\ secante\ m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$per\ la\ tangente\ m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0}{0}$$

L'idea di Leibniz è di sostituire gli zero con numeri infinitamente piccoli o infinitesimi

$$m = \frac{dy}{dx}$$


98 LETTERA DI LEIBNIZ A OLDENBURG, 21 G

(cioè la differenza della prima ordinata $1B\ 1C$, e della seconda ordinata $2B\ 2C$), otterremo $dy^2 = 2ydy$; e $dy^3 = 3y^2dy$, e così via. Siano infatti le due y vicinissime fra loro (aventi cioè la differenza infinitamente piccola) cioè $A1B = y$; e $A2B = y + dy$. Poiché poniamo che dy^2 è la differenza dei quadrati costruiti su questi due segmenti, l'equazione sarà $dy^2 = y^2 + 2ydy + dydy - y^2$. Ossia, omessi $y^2 - y^2$, che si eliminano reciprocamente, e omesso egualmente il quadrato della quantità infinitamente piccola (per le ragioni note dal metodo dei massimi e dei minimi), avremo $dy^2 = 2ydy$. Lo stesso sarà per le altre potenze. Di qui si possono avere le differenze di

Lettera di Leibniz a Oldenburg da trasmettere a Newton - 21 giu 1677

Gli infinitesimi di Leibniz

La filosofia di Leibniz si basa sul concetto di **monade.**

La matematica di Leibniz si basa sul concetto di **infinitesimo**:

Un numero si dice infinitesimo o infinitamente piccolo se è minore di ogni numero reale positivo ma ancora maggiore di zero

$$\forall N \qquad 0 < dx < \frac{1}{N}$$

Principio di estensione

Al numeri infinitesimi si applicano le ordinarie regole dell'algebra.

Leibniz trova la tangente

Data la parabola: $y = x^2$

Calcoliamo l'incremento infinitesimo

$$dy = (x + dx)^2 - x^2$$

$$dy = \cancel{x^2} + 2\,x\,dx + dx^2 - \cancel{x^2}$$

$$dy = 2\,x\,dx + dx^2$$

ma dx^2 è nullo (*)

$$dy = 2\,x\,dx$$

$$\frac{dy}{dx} = 2\,x + \cancel{dx}$$

dx è trascurabile
rispetto a 2x

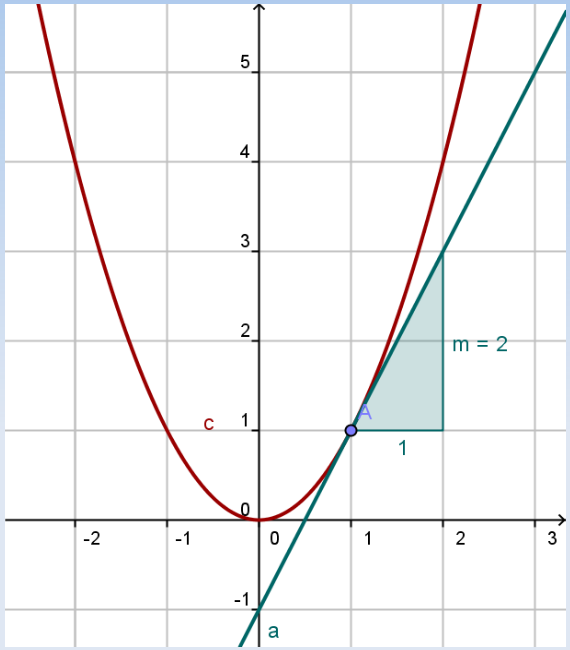
$$\frac{dy}{dx} = 2\,x$$

2x è il coefficiente angolare
della tangente

(*) Lettera di Leibniz a Newton 21 giu 1677

La derivata

Il problema della tangente è così risolto non solo in un punto ma in modo più generale:



$$m = \frac{dy}{dx} = 2x$$

2x infatti è una funzione che si chiama funzione derivata o ***derivata***.

$$y = x^2$$
$$y' = 2x$$

Contemporaneamente ***Isaac Newton*** partendo dal problema della velocità istantanea arriva a conclusioni equivalenti a quelle di Leibniz.

La derivata secondo Leibniz

Generalizzando il metodo:

$$D_x f(x) = \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx}$$

per esempio:

$$D_x x^2 = \frac{(x+dx)^2 - x^2}{dx}$$

$$= \frac{x^2 + 2x\,dx + dx^2 - x^2}{dx} = \frac{2x\,dx + dx^2}{dx} = 2x + dx \simeq 2x$$

La critica di Berkeley

- Il procedimento è contradditorio, l'infinitesimo dx è considerato al tempo stesso uguale a zero e diverso da zero

$$D_x x^2 = \frac{(x+dx)^2 - x^2}{dx} \longrightarrow dx \neq 0$$

$$= \frac{x^2 + 2\,x\,dx + dx^2 - x^2}{dx} = \frac{2\,x\,dx + dx^2}{dx} = 2\,x + \cancel{dx} \simeq 2\,x$$

$$dx = 0$$

- Gli infinitesimi sono quindi

  "Ghosts of departed quantities"

Cauchy e Weierstrass

Cauchy ridefinisce la derivata come un limite:

$$D_x f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$D_x x^2 = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \ldots = \lim_{h \to 0} (2x + h) = 2x$$

Bolzano e Weierstrass ridefiniscono i limiti, senza far uso di infinitesimi, ma con la ben nota definizione epsilon-delta.

- Gli infinitesimi sono banditi dalla matematica!
- Leibniz è screditato!

Robinson risuscita gli infinitesimi

Nel 1960 il logico-matematico Abraham Robinson ha l'idea di rifondare l'analisi sugli infinitesimi, grazie al

- ***teorema di compattezza proposizionale***:

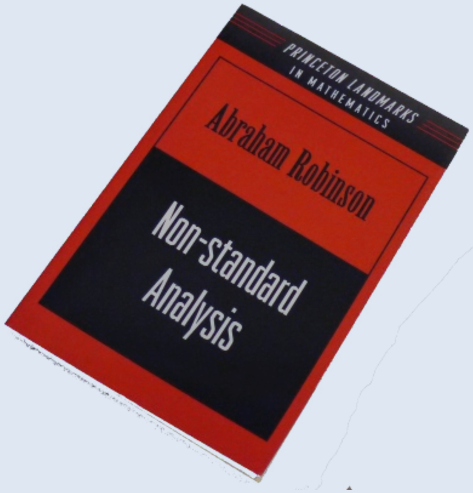
Sia K un insieme infinito di proposizioni tale che ogni sottoinsieme finito di K è consistente. Allora anche K è consistente. *

$$K = \{p_{0,} p_{1,} p_{2} \dots p_{n} \dots\}$$

$$\{p_0\} \subset K$$

$$\{p_{0,} p_1\} \subset K$$

$$\{p_{0,} p_{1,} p_2 \dots p_n\} \subset K$$



- **Abraham Robinson**, *Non standard Analysis,* Princeton 1965, pag.13

Gli infinitesimi di Robinson

$$\{0<\epsilon<1\}$$

Un tale ε esiste, p.es. ε = 1/2

$$\{0<\epsilon<1, 0<\epsilon<1/2\}$$

Un tale ε esiste, p.es. ε = 1/3

$$\{0<\epsilon<1, 0<\epsilon<1/2, 0<\epsilon<1/3\}$$

Un tale ε esiste, p.es. ε = 1/4

$$K=\{0<\epsilon<1, 0<\epsilon<1/2, 0<\epsilon<1/3, 0<\epsilon<1/4 \ldots 0<\epsilon<1/N \ldots\}$$

Esiste un ε per il quale siano tutte vere?

Nell'insieme R dei numeri reali, NO! (postulato di Archimede)

Ma il teorema di compattezza assicura che esiste un insieme esteso R* che comprende *numeri non standard* detti ***infinitesimi (o infinitamente piccoli)***, qui indicati con la lettera ε, che soddisfano l'ultimo insieme in pratica sono minori di ogni numero reale ma maggiori di zero.

Gli infiniti di Robinson

$$\{\omega > 1\} \subset K$$

Un tale ω esiste, p.es. ω = 2

$$\{\omega > 1, \omega > 2\} \subset K$$

Un tale ω esiste, p.es. ω = 3

$$\{\omega > 1, \omega > 2, \omega > 3\} \subset K$$

Un tale ω esiste, p.es. ω = 4

$$K = \{\omega > 1, \omega > 2, \omega > 3, \omega > 4 \ldots \omega > N \ldots\}$$

Esiste un ω per il quale siano tutte vere?

Nell'insieme R dei numeri reali, NO!

Ma il teorema di compattezza assicura l'esistenza di un insieme esteso che comprende numeri non standard ***infiniti (o infinitamente grandi)***, qui indicati con la lettera ω, che soddisfanno l'ultimo insieme in pratica sono maggiori di ogni numero reale N.

I numeri iperreali

L'insieme esteso dei numeri reali standard e non standard costituisce l'insieme dei ***numeri iperreali.***

I numeri iperreali possono rappresentarsi come somma di una parte reale e di una parte infinitesima o infinita, per esempio:

$$3+3\epsilon-4\epsilon^2 \longrightarrow 3+3\,dx-4\,dx^2$$

Notazione di Leibniz

$$3+3\omega-4\omega^2$$

I numeri iperreali in cifre

Ma i numeri iperreali si possono scrivere in cifre come quelli reali?

Una possibile rappresentazione numerica usa una sequenza di infiniti numeri reali (*un po' come un reale può rappresentarsi con una sequenza infinita di cifre*):

$$3=(3,3,3,3\ldots3\ldots)$$

$$\omega=(1,2,3,4,\ldots N\ldots)$$

$$3+3\omega=(6,9,12,15\ldots)$$

Infiniti

$$\epsilon=\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}\ldots\frac{1}{N}\ldots\right)$$

$$3+3\epsilon=\left(6,\frac{9}{2},4,\frac{15}{4}\ldots\right)$$

Infinitesimi

Robinson rifonda l'analisi

Fondamentale è la funzione parte standard che restituisce la parte reale di un numero iperreale:

$$st(a + b\,dx) = a$$

La definizione di derivata di Leibniz diviene:

$$D_x f(x) = st\left(\frac{f(x+dx) - f(x)}{dx}\right)$$

La derivata secondo Robinson

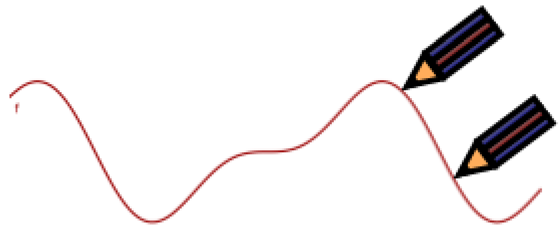
$$D_x x^2 = st\left(\frac{(x+dx)^2 - x^2}{dx}\right)$$

$$= st\left(\frac{x^2 + 2\,x\,dx + dx^2 - x^2}{dx}\right) = st\left(\frac{2\,x\,dx + dx^2}{dx}\right) = st(2\,x + dx) = 2\,x$$

L'eliminazione dell'infinitesimo alla fine non comporta più contraddizioni.

Continuità (intuitiva)

Continuità e discontinuità



Linea continua

Si può disegnare senza staccare la matita dal foglio

Linea discontinua

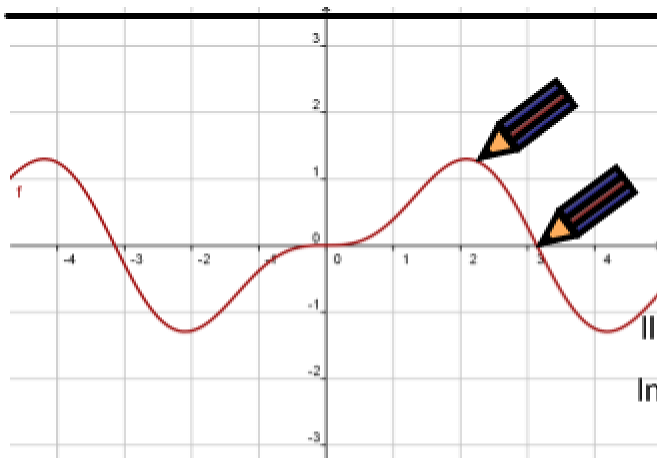
Non si può disegnare senza staccare la matita dal foglio

Ogni tanto si è costretti a staccare la matita dal foglio *(salto discontinuità)*

salto = discontinuità

Funzioni continue: esempi

Funzioni continue e discontinue

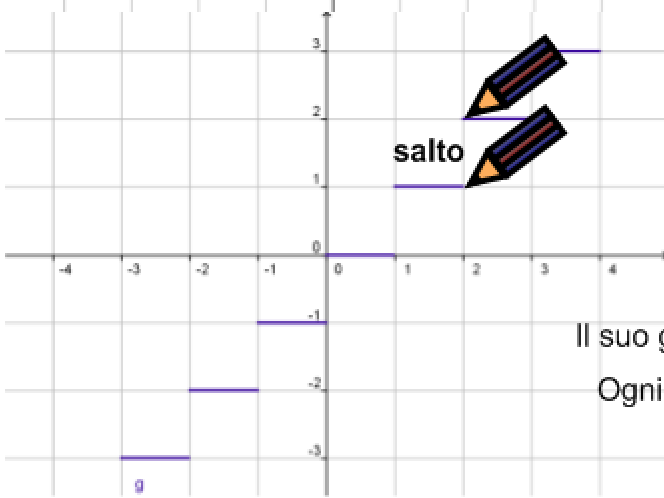


funzione continua

y = f(x) = sin(x) -sin(x)/2

Il suo grafico si può disegnare senza staccare la matita dal foglio

In questo caso si tratta di una funzione goniometrica.



funzione discontinua

y = f(x) = floor(x)

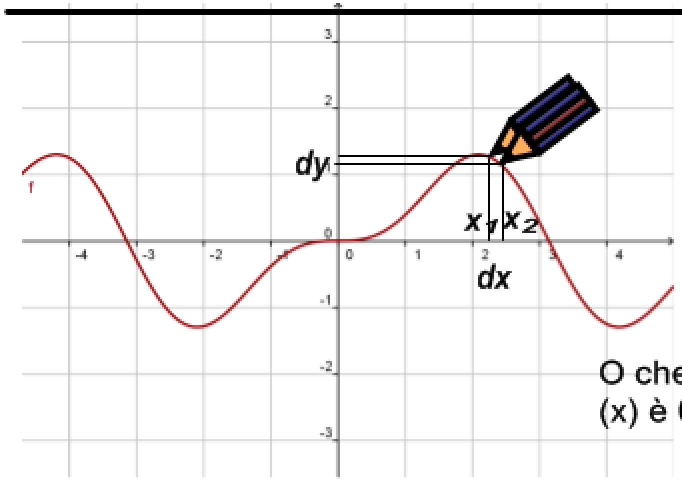
Il suo grafico non si può disegnare senza staccare la matita dal foglio

Ogni tanto si è costretti a staccare la matita dal foglio

(salto = discontinuità)

Continuità: definizione

Funzioni continue: alla ricerca di una definizione formale



***f(x)* = è continua se ...**

A un incremento infinitesimo della x
corrisponde un incremento al più infinitesimio della y

$$|f(x+dx)-f(x)| <= dy$$

O che è lo stesso, la parte standard della differenza f(x+dx) -f (x) è 0. (un numero infinitesimo ha sempre parte standard 0)

$$st(f(x+dx)-f(x)) = 0$$

La definizione sopra è quella di continuità a destra di x: si può anche definire una continuità a sinistra di x come segue.

$$st(f(x)-f(x-dx)) = 0$$

In alternativa usando il concetto di infinitamente vicino:

$$x \cong x_1 \Rightarrow f(x) \cong f(x_1)$$

in altre parole, se due numeri x e x_1 sono infinitamente vicini allora anche le loro immagini f(x) ed f(x_1) lo sono.
Si intende qui x_1 = x +dx

Continuità: confronto con la definizione standard

- Definizione di continuità per un x_0 reale
- Definizione classica (Weierstrass)

$$\forall \epsilon \exists \delta \forall x : |x - x_0| < \delta \rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

- *due cambiamenti di quantificatore: piuttosto difficile*

- Definizione non standard (Robinson)

$$\forall x : x \simeq x_0 \rightarrow f(x) \simeq f(x_0)$$

- *un solo quantificatore: meno difficile*

Derivata della funzione composta

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\times\frac{dt}{dx}$$

$$st\left(\frac{dy}{dx}\right)=st\left(\frac{dy}{dt}\right)\times st\left(\frac{dt}{dx}\right)$$

$$y=e^{(x^2-1)}$$

$$y=e^t\,;t=x^2-1$$

$$\frac{dy}{dt}=e^t\,;\frac{dt}{dx}=2x$$

$$\frac{dy}{dx}=2x\,e^t=2x\,e^{x^2-1}$$

Sia $y=f(x)$ una funzione composta mediante le funzioni:

$y=f(t)\,e\,t=g(x)$

che supporremo entrambe derivabili. Si ha:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{f[g(x+h)]-f[g(x)]}{h}$$

e quindi applicando la seconda formula dell'incremento finito, si ha:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f[g(x)+hg'(x)+h\omega_2]-f(g(x))}{h}$$

e ponendo $h\,f'(x)+h\,\omega_2=k$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f[t+k]-f(t)}{h}$$

applichiamo ora a $f(t+k)$ la prima formula dell'incremento finito ove si sostituisca x con t e h con k, avremo:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=[f(t)+\omega_1]\frac{k}{h}$$

e ripristinando per k l'espressione $h\,f'(x)+h\,\omega_2$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(t)\,g'(x)+g'(x)\omega_1+f'(t)\omega_2+\omega_1\,\omega_2$$

che per $h\to 0$ dà:

$$\frac{dy}{dx}=f'(t)\,g'(x)$$

Possibili percorsi didattici

1) (Minimo) Derivate e integrali di funzioni polinomiali (e studio di tali funzioni)
2) (1)+ Calcolo numerico di aree ed integrali
3) (2)+ Funzioni esponenziali, logaritmiche, goniometriche.
4) (3) + Polinomi di Maclaurin

Bibliografia

A.Robinson, *Non Standard Analysis* - Princeton 1966

J.M Henle-E.M.Kleinberg, *Infinitesimal Calculus* - Dover Publications 2003

J.L. Bell, *A primer of Infinitesimal Analysis* - Cambridge University Press 1998

a cura di G.Cantelli, *La disputa Leibniz-Newton sull'analisi*, Universale Bollati Boringhieri, Torino 1958-2006.

R.Courant- H.Robbins, *Che cos'è la Matematica* (a)Cap.9.12 Analisi non standard (pag. 620) - Bollati-Borighieri Torino 2000

C. B. Boyer, *Storia della Matematica* - Oscar Mondadori Milano 1968