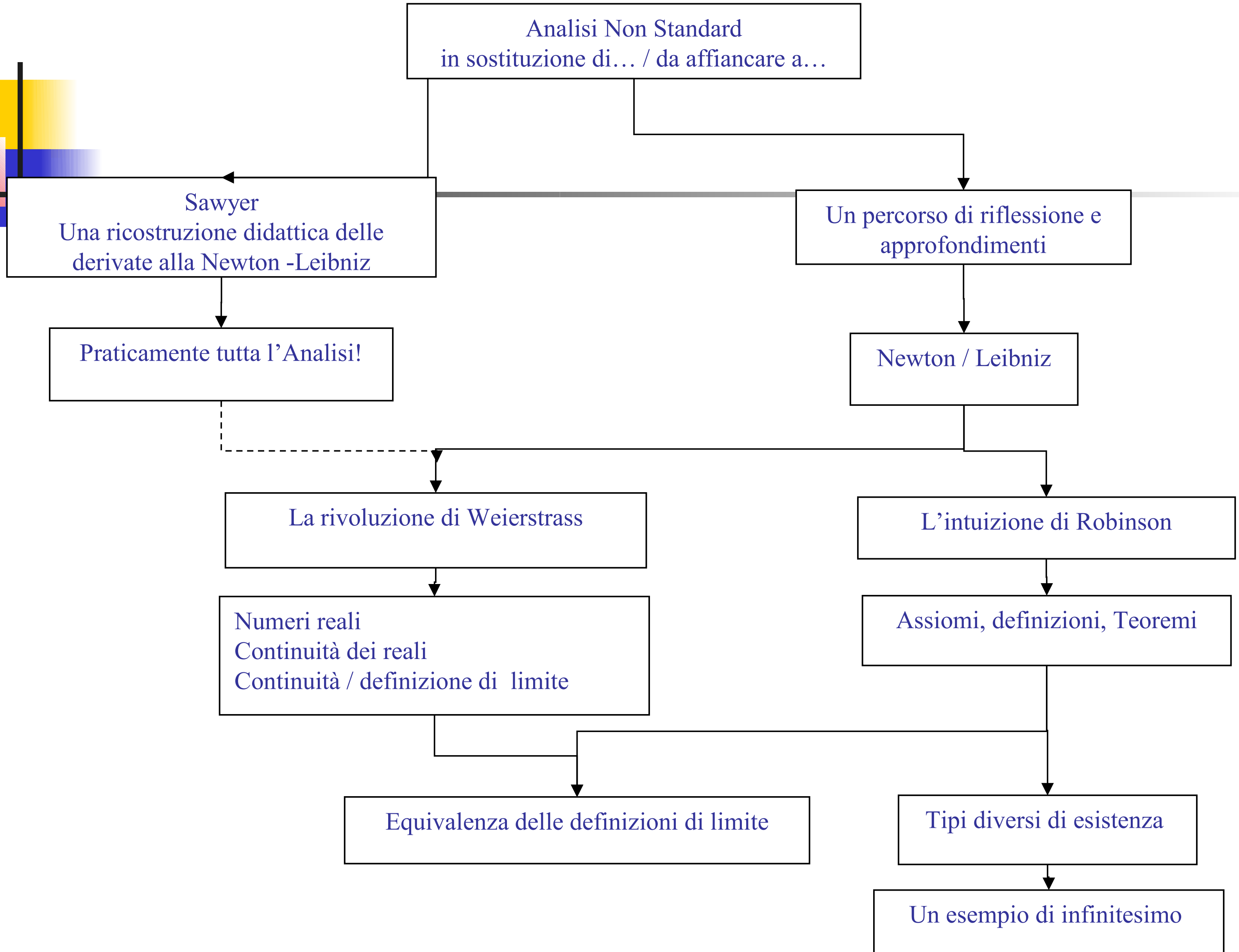
VENEZIA 20 11 2011

INFINITESIMI:

DALLA CONTRADDITTORIETA' ALL'ESISTENZA


Analisi Non Standard
in sostituzione di… / da affiancare a…
Sawyer
Una ricostruzione didattica delle derivate alla Newton -Leibniz
Un percorso di riflessione e approfondimenti
Praticamente tutta l’Analisi!
Newton / Leibniz
La rivoluzione di Weierstrass
L’intuizione di Robinson
Numeri reali
Continuità dei reali
Continuità / definizione di limite
Assiomi, definizioni, Teoremi
Equivalenza delle definizioni di limite
Tipi diversi di esistenza
Un esempio di infinitesimo

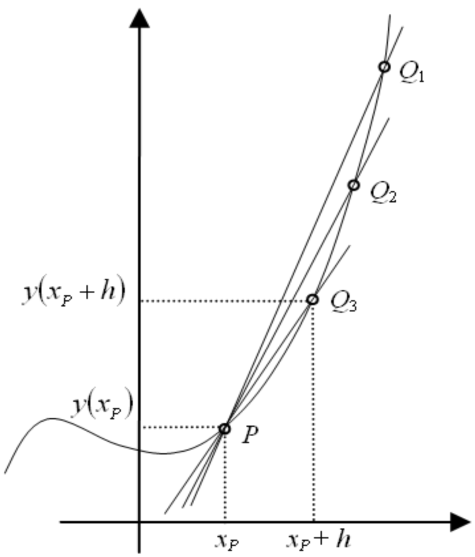
L’ANALISI NON STANDAR

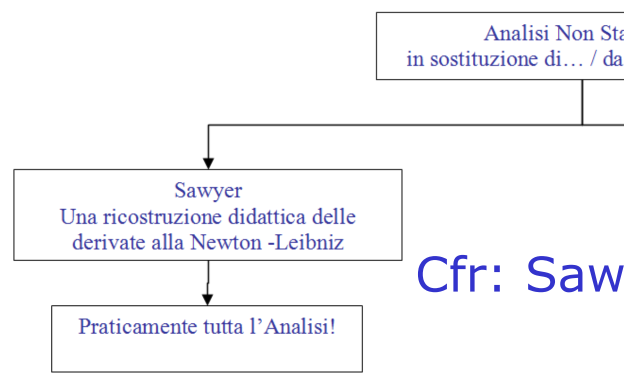
– *In sostituzione di …*

– *Da affiancare a …*

PENDENZA DELLA TANGENTE AD UNA CURVA IN UN SUO PUNTO
(Metodo delle corde – Parte prima)

x_P	y_P	$h=\Delta x$	$x_Q = x_P+h$	$y_Q= y(x_P+h)$	Δy	$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{h}$
2	4	1	3	9	5	5
		0,5	2,5	6,25	2,25	4,5
		0,1	2,1	4,41	0,41	4,1
		0,01	2,01	4,0401	0,0401	4,01
		0,001	2,001	4,004001	0,004001	4,001





Cfr: Sawyer

PENDENZA DELLA TANGENTE AD UNA CURVA IN UN SUO PUNTO
(Metodo delle corde – Parte seconda)

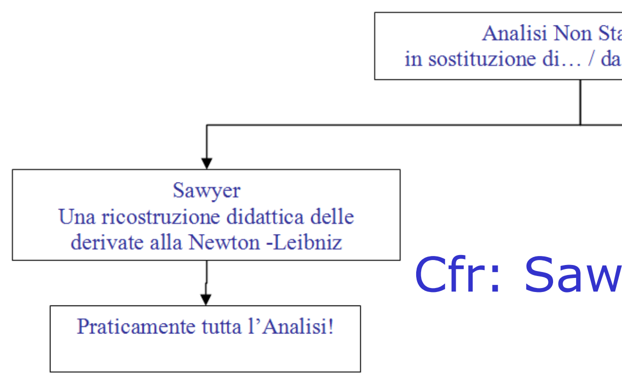
Concetti preliminari

Data la funzione $f(x) = 2x^2 + 3x$ (che scriviamo anche $y(x) = 2x^2 + 3x$), col consueto significato dei simboli si ha:

$y(0) = 2 \cdot 0^2 + 3 \cdot 0 = 0$; $\quad y(-1) = 2 - 3 = -1$; $\quad y(x_0) = 2x_0^2 + 3x_0$;

$y(x_0 + h) = 2(x_0 + h)^2 + 3(x_0 + h)$;

$$y\left(\frac{a}{2}\right) = 2\left(\frac{a}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{a}{2}\right) = 2 \cdot \frac{a^2}{4} + 3\frac{a}{2} = \frac{3}{2}a\left(a + 1\right)$$



Cfr: Sawyer

PENDENZA DELLA TANGENTE AD UNA CURVA IN UN SUO PUNTO
(Metodo delle corde – Parte seconda)

Vogliamo affrontare il problema in un modo più generale .

Esercizio svolto: Calcolare il coefficiente angolare della tangente alla $y = x^2$ in un suo punto

$$m(x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y(x+h) - y(x)}{x+h-x} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h} = \frac{2hx + h^2}{h} = \frac{(2x+h)h}{h}$$

dividendo per h (cioè considerando $h \neq 0$)

$$2x + h \qquad (1)$$

trascurando h (cioè considerando $h = 0$)

$$2x \qquad (2)$$

Come ognuno può vedere i passaggi (1) e (2) sono contraddittori.

LA CRITICA DI BERKELEY

Leibniz, Newton e i loro seguaci non si fanno alcuno scrupolo, prima di supporre e poi di ripudiare le quantità infinitesime

dividendo per h (cioè considerando $h \neq 0$)

$$2x + h \qquad (1)$$

trascurando h (cioè considerando $h = 0$)

$$2x \qquad (2)$$

Cfr: Kline

LA FUNZIONE $m(x)$

Esercizi: Calcolate il coefficiente angolare della tangente alle seguenti funzioni in un loro generico punto, cioè determinate la funzione $m(x)$

1. $y = 2x^2$ 2. $y = \frac{1}{3}x^2$ 3. $y = x^3$

4. $y = \frac{1}{x}$ 5. $y = \sqrt{x}$ 6. $y = \sqrt{x+3}$

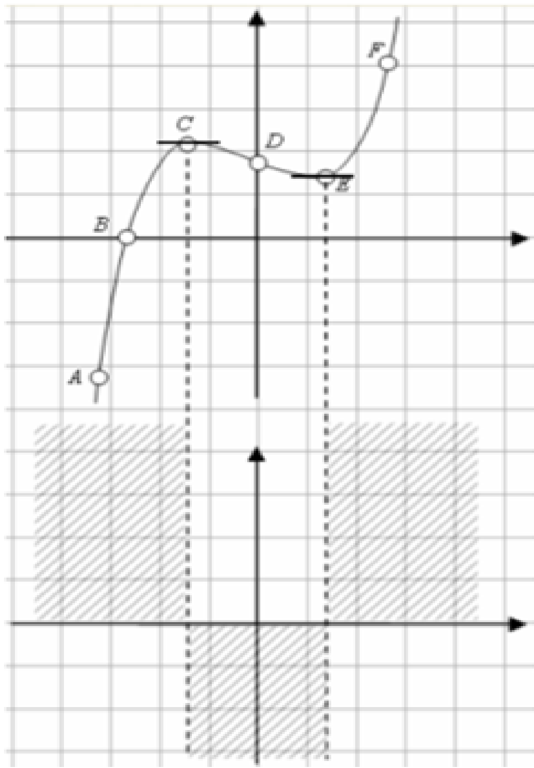
7. $y = (x+2)^2$ 8. $y = 2x+1$ 9. $y = 3$

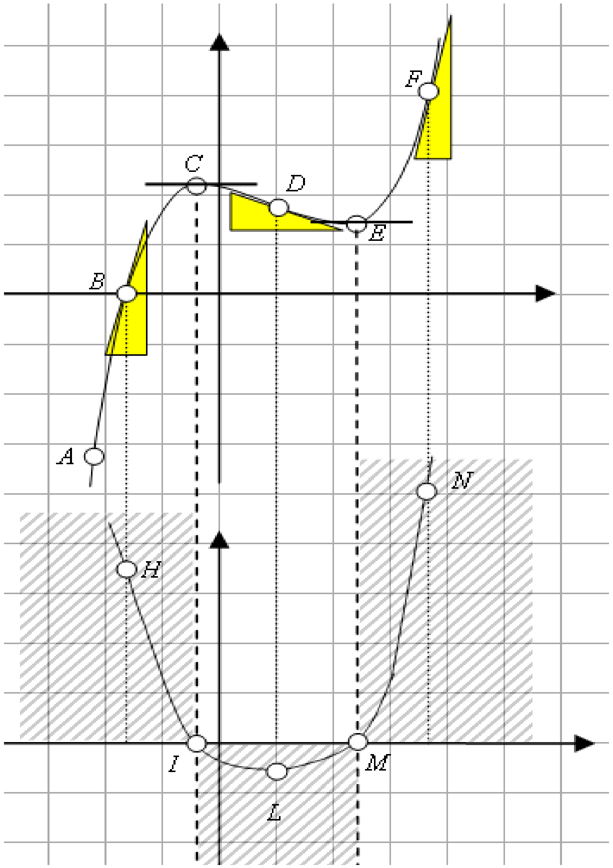
Esercizi: calcolare il coefficiente angolare della tangente alle curve seguenti nei punti indicati

1. $y = 2x^2$ in P(1,2) 2. $y = \sqrt{x}$ in P(4,2)

3. $y = x^3$ in P(2,8) 4. $y = \frac{1}{x}$ in P(1,1)

DAL GRAFICO DELLA FUNZIONE *f*(*x*) A QUELLO DELLA FUNZIONE *f'*(*x*)





ALCUNI TEOREMI SULLE DERIVATE

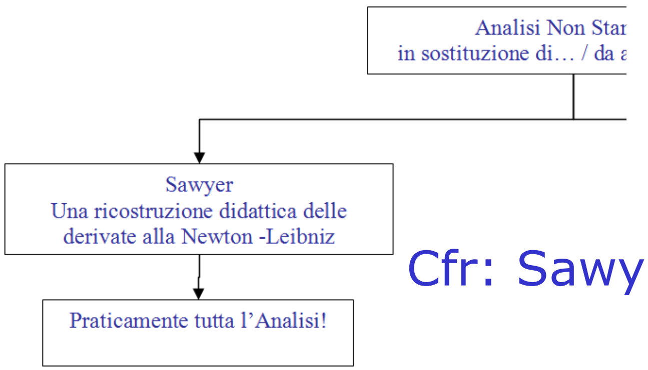
Teorema T1: $D\left[x^n\right] = n \cdot x^{n-1}$

Teorema T2: $D\left[f(x) + g(x)\right] = D\left[f(x)\right] + D\left[g(x)\right]$

dim: $\varphi(h) = \dfrac{\left(f(x+h) + g(x+h)\right) - \left(f(x) + g(x)\right)}{h} = \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} + \dfrac{g(x+h) - g(x)}{h}$

Teorema T3: $D\left[k \cdot f(x)\right] = k \cdot D\left[f(x)\right]$

dim: $\varphi(h) = \dfrac{k \cdot f(x+h) - k \cdot f(x)}{h} = k\,\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$



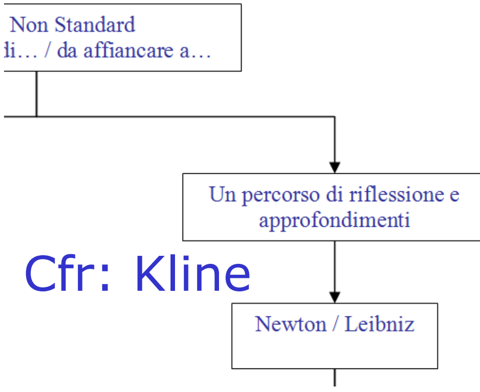
Cfr: Sawyer

NEWTON / LEIBNIZ

Newton: La tangente è il limite della corda.

"Gli ultimi rapporti non sono i rapporti delle ultime quantità, ma i limiti ai quali i rapporti delle quantità decrescenti si avvicinano sempre, illimitatamente, e ai quali si possono avvicinare per più di qualunque differenza data."

Concetto di limite, formalizzazione dei numeri reali.



Cfr: Kline

NEWTON / LEIBNIZ

Leibniz: La tangente ha due punti di contatto infinitamente vicini con la curva.

“Si constata che le regole del finito funzionano nell’infinito e viceversa, come se ci fossero degli *infinitamente piccoli metafisici*”.

Concetto di infinitamente piccolo e infinitamente grande, numeri iperreali.

Cfr: Kline

La rivoluzione di Weierstass

Ci sono molti caratteri di una rivoluzione scientifica:

- presenza di un’anomalia
- accantonamento dell’anomalia
- rimozione dell’anomalia

Didatticamente:

- motivare l’”astrusa” definizione di limite

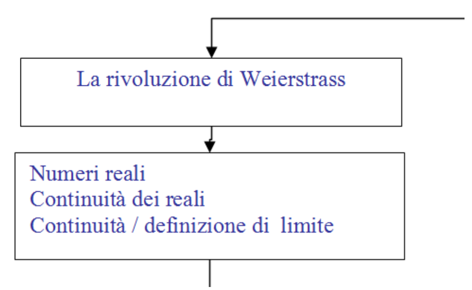
Prevale il concetto di *limite*, ma il significato del termine cambia:

è tutto, e soltanto, nella definizione!

La rivoluzione di Weierstass

E’ bandito il significato intuivo di “passaggio al limite”: non c’è nessuno che si “avvicini” a nessuno, né alcuna posizione limite della corda che improvvisamente diventa la tangente.

Sono banditi gli infinitesimi: si opera con quantità finite.



I NUMERI REALI SECONDO DEDEKIND

1872 anno mirabile

– Dedekind formula l'assioma di continuità

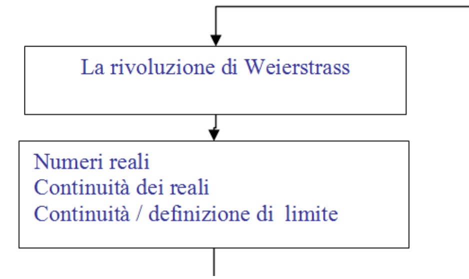
– Compare la definizione di numero reale

In questa scheda
dimostriamo un risultato molto importante, la *continuità* di $\boldsymbol{R}$ (cioè che in $\boldsymbol{R}$ è vero l'assioma D). Per farlo dovremo costruire i numeri reali indipendentemente dalla loro rappresentazione decimale.

– Compare la definizione di limite

Cfr Waismann

I NUMERI REALI E
LA DEFINIZIONE DI LIMITE



1872 anno mirabile

- Dedekind formula l'assioma di continuità
- Compare la definizione di numero reale
- Compare la definizione di limite

Il contenuto di questa scheda

mostreremo come la continuità di ***R*** assicuri l'esistenza del limite di una funzione, in definitiva che ***R*** è chiuso rispetto all'operazione di limite! Ciò dovrebbe aiutarvi a capire che l'analisi risulta armoniosa in ogni sua parte!

Cfr Waismann

L’INTUIZIONE DI ROBINSON

Gli infinitesimi … devono essere considerati non necessari erronei e auto contradditori (Russel)

– 1948 Hewitt (Teoria dei modelli)

– Anni ’60 Robinson

– Qualche anno dopo Keisler (Teoria assiomatica degli iperreali)

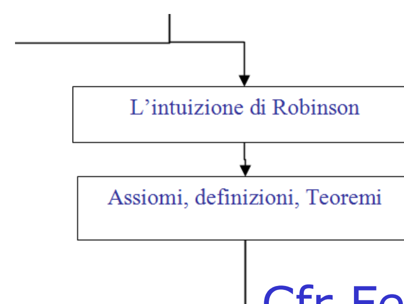
ASSIOMI E DEFINIZIONI

A1 L'insieme R* (*insieme dei numeri iperreali*) ha come elementi: numeri reali e numeri infinitesimi.

D1 Un numero ε si dice un *infinitesimo* se $-\frac{1}{n} < \varepsilon < \frac{1}{n} \quad \forall n \in N_0$.

A2 Un numero *iperreale finito* è definito come $a = r + \varepsilon$, con $r \in R$ e ε infinitesimo.

A3 Con gli infinitesimi si possono eseguire tutte le operazioni che si eseguono fra reali



Cfr Ferro

ASSIOMI E DEFINIZIONI PER …

… dimostrare teoremi

Esempi

Se ε è infinitesimo, ci aspettiamo che $\varepsilon + \varepsilon$ sia infinitesimo

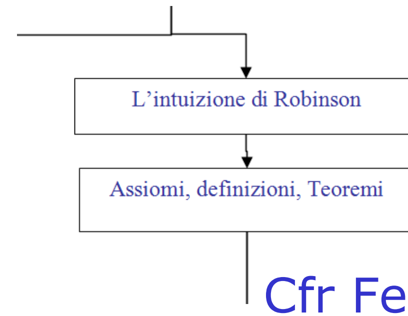
T1 Se $k \in N_0$ e ε è infinitesimo, allora $k\varepsilon$ è infinitesimo

Dim Per assurdo $k\varepsilon$ non sia infinitesimo, allora per qualche naturale n si ha

$\frac{1}{n} < k\varepsilon$, $\frac{1}{nk} < \varepsilon$ ora posto $n' = kn$ si ha $\frac{1}{n'} < \varepsilon$: contraddizione!

Cfr Ferro

ASSIOMI E DEFINIZIONI PER …



Cfr Ferro

… dimostrare teoremi

D2 Il numero c si dice *infinito* se $c > n \quad \forall n \in N$

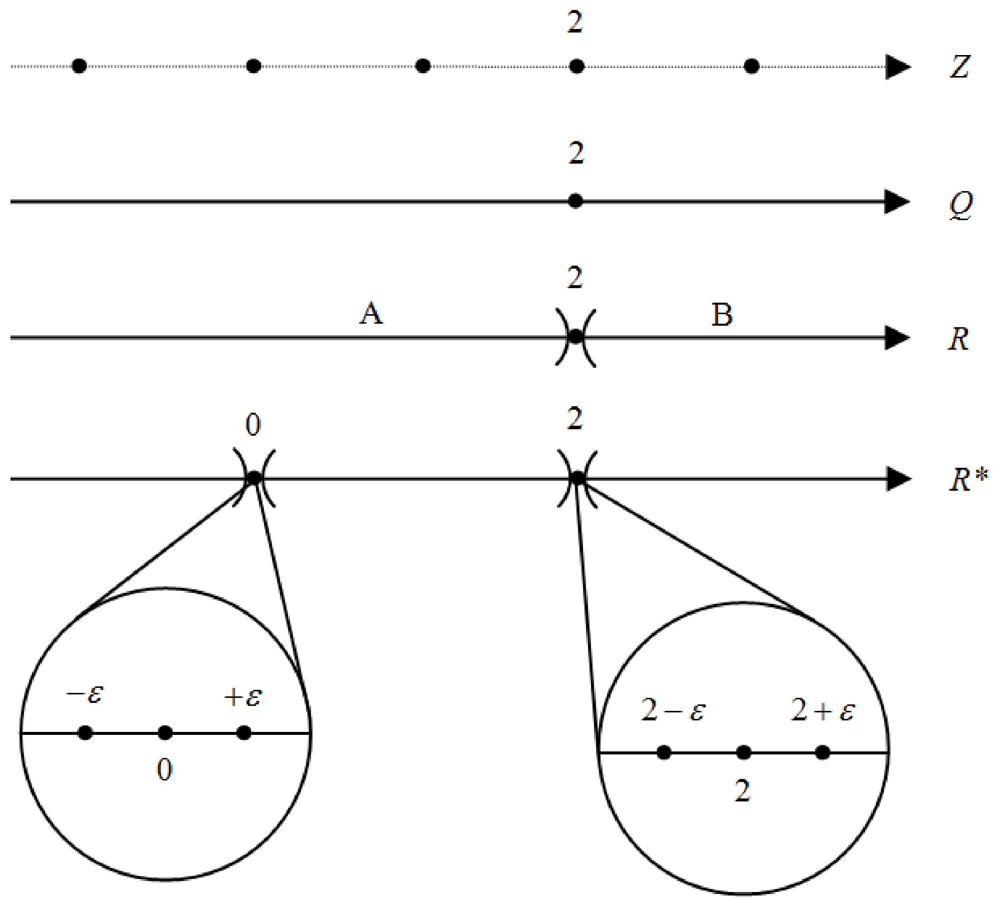
T5 Esistono numeri iperreali infiniti.

Dim Sia $\varepsilon < \dfrac{1}{n} \quad \forall n \in N_0$, facendo i reciproci di ambo i membri $\dfrac{1}{\varepsilon} > n \quad \forall n \in N_0$

RAPPRESENTAZIONE GRAFICA

Come sono fatti questi numeri?
Ce lo dicono gli assiomi

Ma abbiamo bisogno anche di immaginarceli!

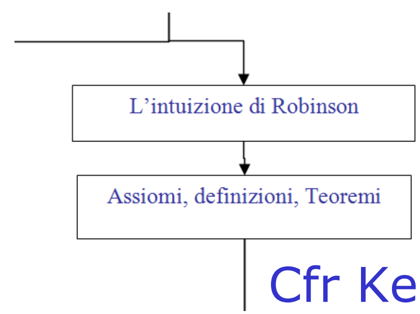


MONADE E PARTE STANDARD

Esempi

Calcolo della parte standard

Sia $x = 3 + c$ un numero iperreale con c infinitesimo, la sua parte standard è $st(3 + c) = 3$



Cfr Keisler

MONADE E PARTE STANDARD

Esempi

Se $f(x) = 2x - 1$,

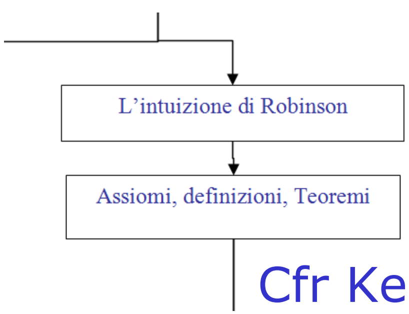
si avrà $f(3 + c) = 2(3 + c) - 1 \;\; = 5 + c$;

$f(x + c) = 2(x + c) - 1 = 2x + 2c - 1$

Cfr Keisler

DERIVATA ALLA ROBINSON

$$D[f(x)] = st(\varphi) = st\left(\frac{f(x+\eta) - f(x)}{\eta}\right)$$



Cfr Keisler

LA COMPARAZIONE GENERA METACOGNIZIONE

La nostra ricostruzione didattica della derivata alla Newton-Leibniz. Con una ricomposizione all'interno dell'analisi non standard

$$f'(x)=m(x)=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y(x+h)-y(x)}{x+h-x}=\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\frac{x^2+2hx+h^2-x^2}{h}=\frac{2hx+h^2}{h}=\frac{(2x+h)h}{h}$$

dividendo per h (cioè considerando $h \neq 0$)

$$2x+h \qquad (1)$$

trascurando h (cioè considerando $h=0$)

$$2x \qquad (2)$$

I due passaggi (1), (2) non sono più contraddittori se lavoriamo in τ_{IR}:
dividendo per h (è possibile farlo poiché h è un infinitesimo supposto diverso da zero)

$$2x+h \qquad (1)$$

~~trascurando h~~ (questo passaggio va sostituito prendendo la parte standard di $2x+h$)

$$st(2x+h)=2x \qquad (2)$$

EQUIVALENZA DELLA DEFINIZIONE DI LIMITE ALLA WEIERSTRASS E ALLA ROBINSON

Riflessione didattico-linguistica

– Il concetto di “vicino” è relativo, e questo è scontato

– Senso comune: limite = essere sempre più vicino

– Weierstrass: limite = essere più vicino di una quantità prefissata

– Robinson: limite = essere vicinissimo

Cfr Ferro

L’insegnamento di Zanzotto:
la scienza come strumento per arricchire il linguaggio e come fonte di metafore.

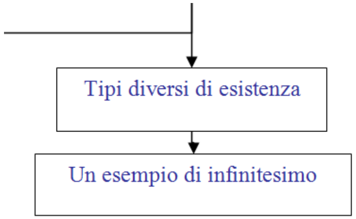
IL PROBLEMA ONTOLOGICO

L'idea di Robinson mette le cose a posto sul piano logico

Ma solleva drammaticamente il problema ontologico

Contraddittorietà = non esistenza!

Non contraddittorietà = esistenza?



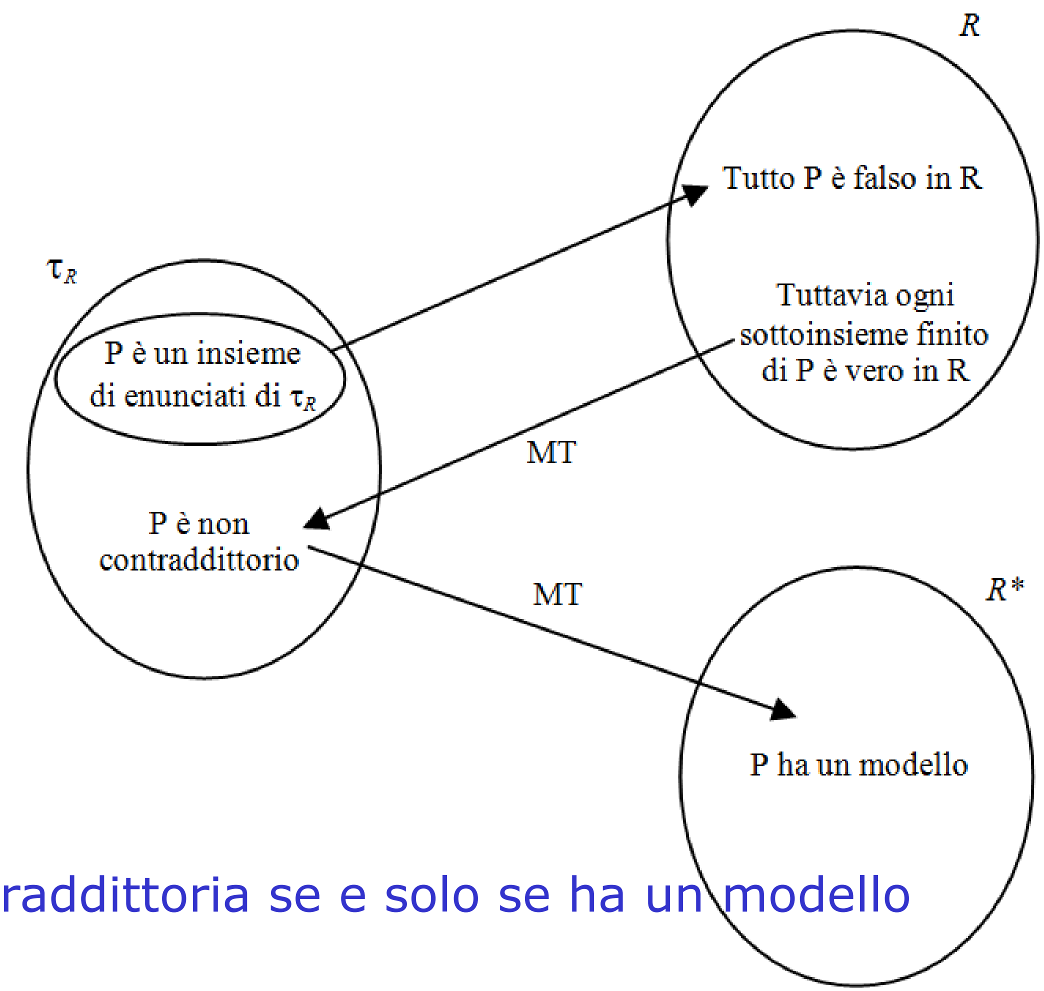
GLI INFINITESIMI ESISTONO

- 1948 Hewitt (Teoria dei modelli)
- Anni ’60 Robinson
- Qualche anno dopo Keisler (Teoria assiomatica degli iperreali)

GLI INFINITESIMI ESISTONO

P

$0 < c < 1/2$
$0 < c < 1/3$
$0 < c < 1/4$
…
$0 < c < 1/n$
…



Metateorema
Una teoria è non contraddittoria se e solo se ha un modello

Cfr Davis, Hersh

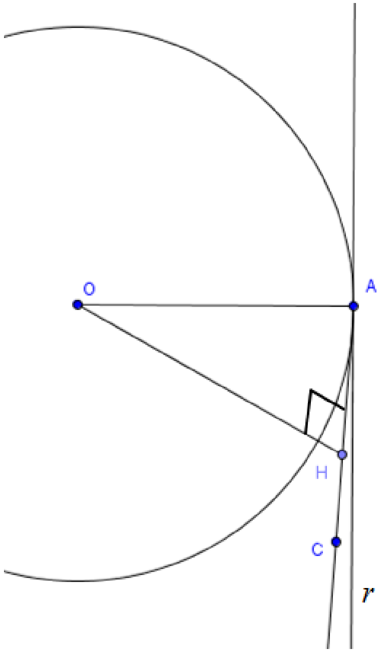
ANGOLO DI CONTINGENZA

Sentiamo il bisogno di un esempio “concreto” di infinitesimi in atto!

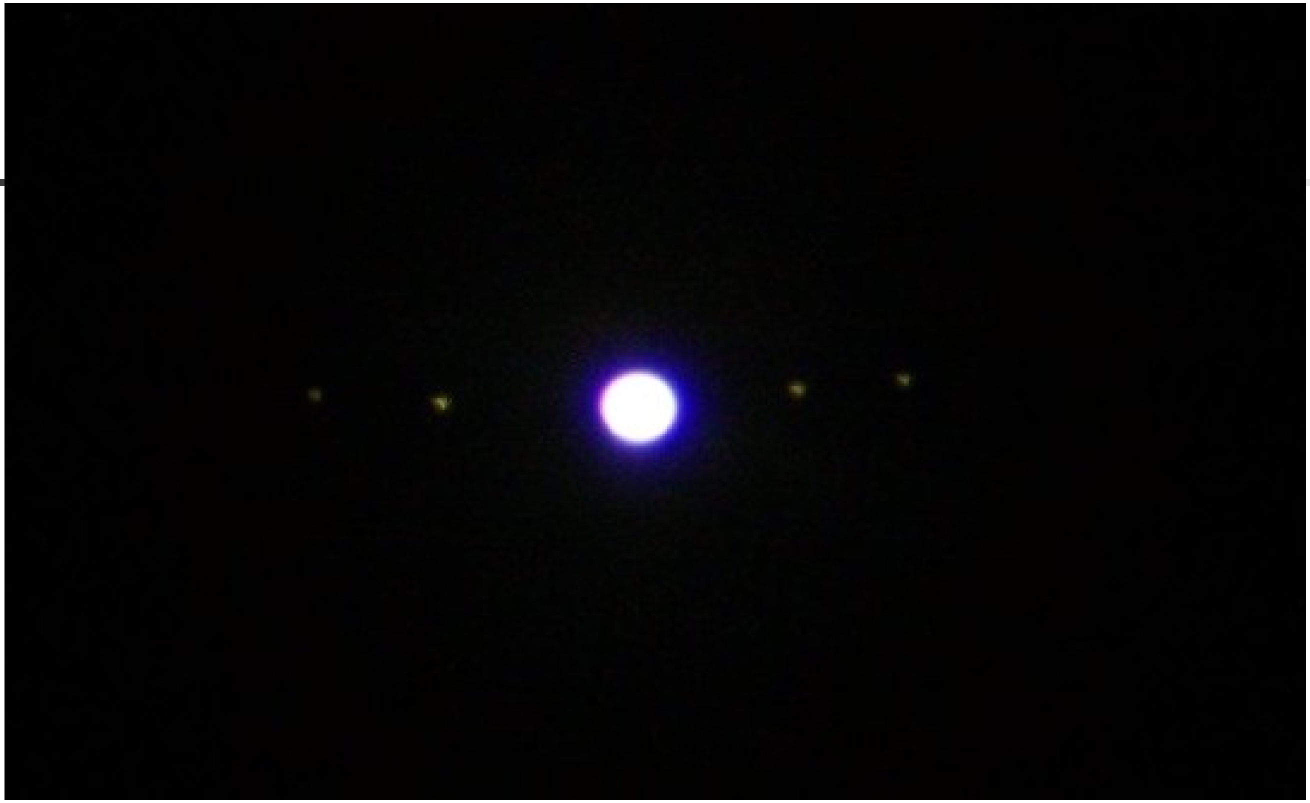
T16$_{\mathrm{III}}$ Se si innalza la perpendicolare in un estremo del diametro di un cerchio, essa cade fuori dal cerchio. Inoltre Tra le rette perpendicolari al diametro in un suo estremo e il cerchio non è interposta alcuna retta.

Corollario L’angolo di contingenza (formato dalla tangente e il cerchio) è minore di qualsiasi angolo rettilineo.

$$0 < \omega < \frac{\alpha}{n}$$



Cfr Agazzi. Palladino



FINE PRESENTAZIONE

BIBLIOGRAFIA

- Sawyer, *il calcolo infinitesimale*, Zanichelli, 1983
- Kline, *Matematica la perdita della certezza*, Mondadori, 1985
- Waismann, *Introduzione al pensiero matematico*, Boringhieri, 1970
- Keisler, *Elementary calculus an infinitesimal approach*, questo libro è interamente scaricabile dal sito http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.0/.
- Ferro, *Due problemi*, comunicazione personale in corso di pubblicazione
- Davis, Hersh, *Logica*, Quaderni delle Scienze, N 60, 1991
- Agazzi, Palladino, *Le geometrie non euclidee*, Mondadori, 1978