Giornata di studio

ANALISI NON STANDARD NELLE SCUOLE SUPERIORI

Venezia, 20 novembre 2011

20 anni di calcolo infinitesimale

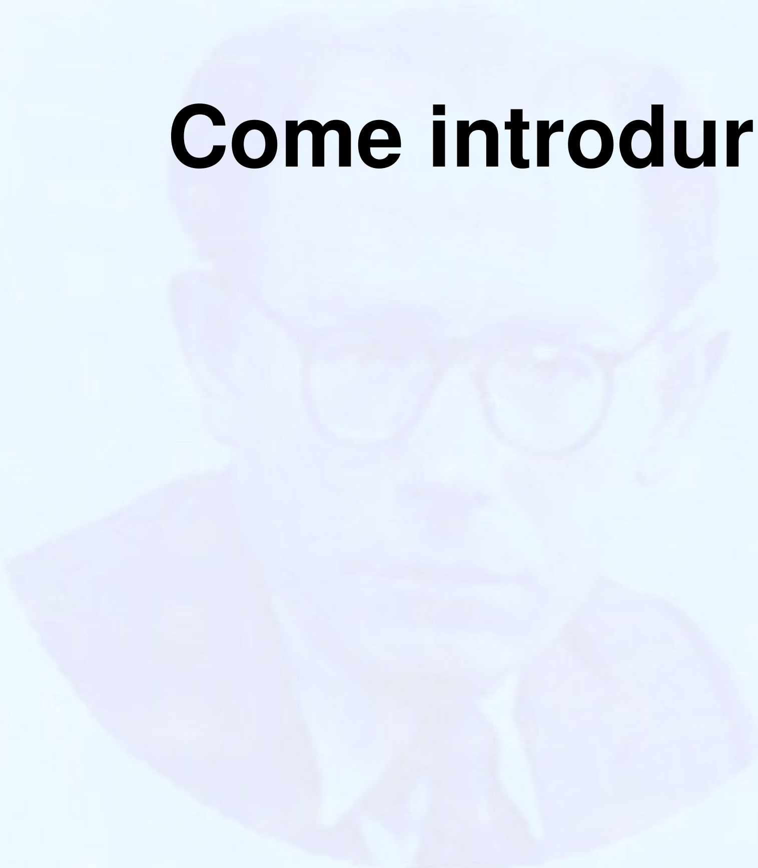
Giorgio Goldoni
ITIS "Leonardo da Vinci" - Carpi (MO)

$$\frac{20 \ \text{anni di calcolo infinitesimale}}{20 \ \text{minuti}} =$$

$$= \frac{1 \ \text{anno di calcolo infinitesimale}}{\text{minuto}}$$

$$\text{fattore di compressione} = 525\,960$$

Come introdurre i numeri iperreali?



Come introdurre i numeri iperreali?

- costruirli a partire dai numeri reali?

Come introdurre i numeri iperreali?

• costruirli a partire dai numeri reali?
Improponibile!!

Come introdurre i numeri iperreali?

- costruirli a partire dai numeri reali?

Improponibile!!

- in modo assiomatico?

Come introdurre i numeri iperreali?

• costruirli a partire dai numeri reali?
Improponibile!!

• in modo assiomatico?

Sì se, come si fa per la geometria, l’approccio assiomatico (opportunamente annacquato) è accompagnato da una visualizzazione che giustifica e riempie di significato gli assiomi.

Da dove partire?

Dal cercare di capire come mai nei numeri reali non c’è posto per gli infinitesimi (non nulli) e per gli infiniti

Se pensiamo al processo di misura che conduce ai numeri reali, allora occorre andare al cosiddetto assioma di eudosso/archimede.

L’assioma di Eudosso/Archimede

1. Dati due segmenti diversi, esiste sempre un multiplo del minore che supera il maggiore

2. Dati due segmenti diversi, esiste sempre un sottomultiplo del maggiore che è più piccolo del minore

Ammettiamo che esistano coppie di segmenti diversi tali che nessun multiplo del minore superi il maggiore.

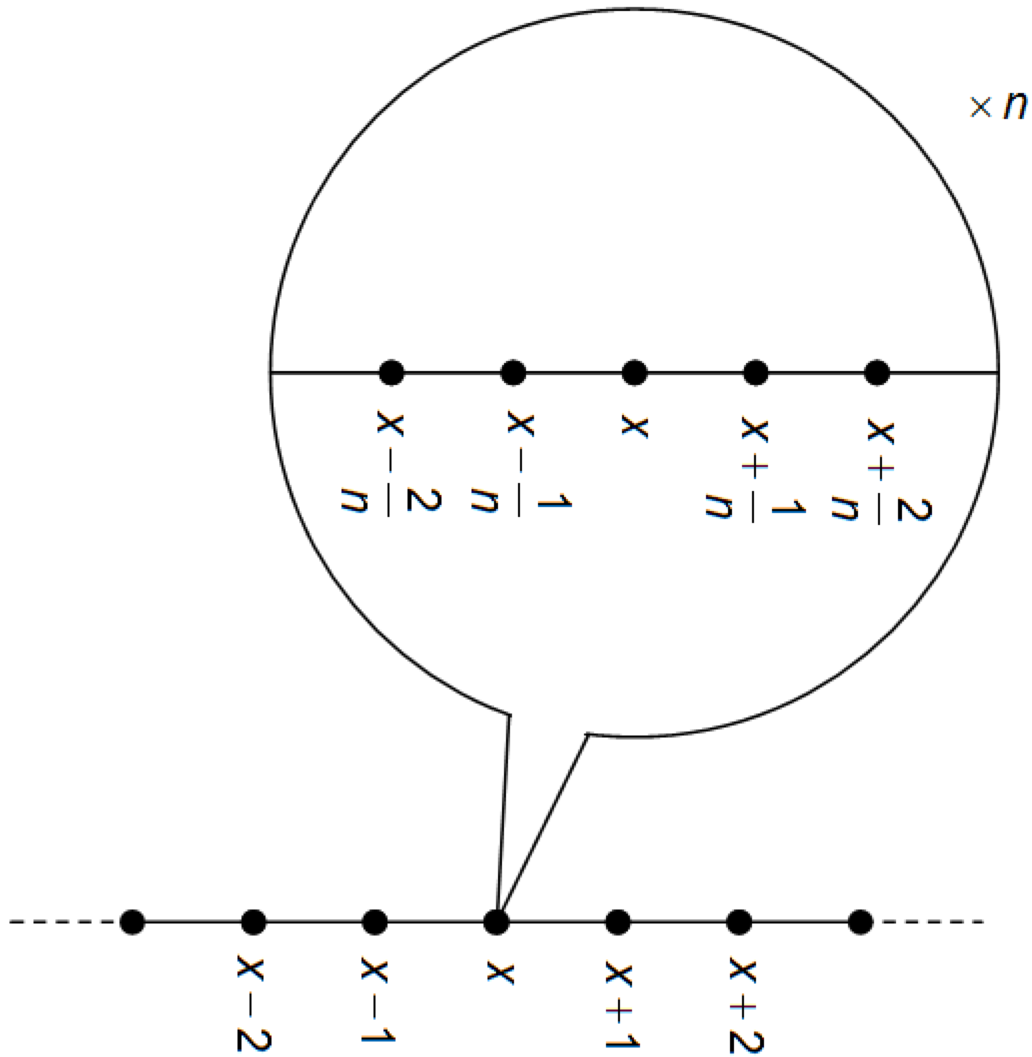
Un immortale che parta da un estremo del segmento maggiore e cammini a passi uguali al segmento minore non raggiungerà mai l’altro estremo.

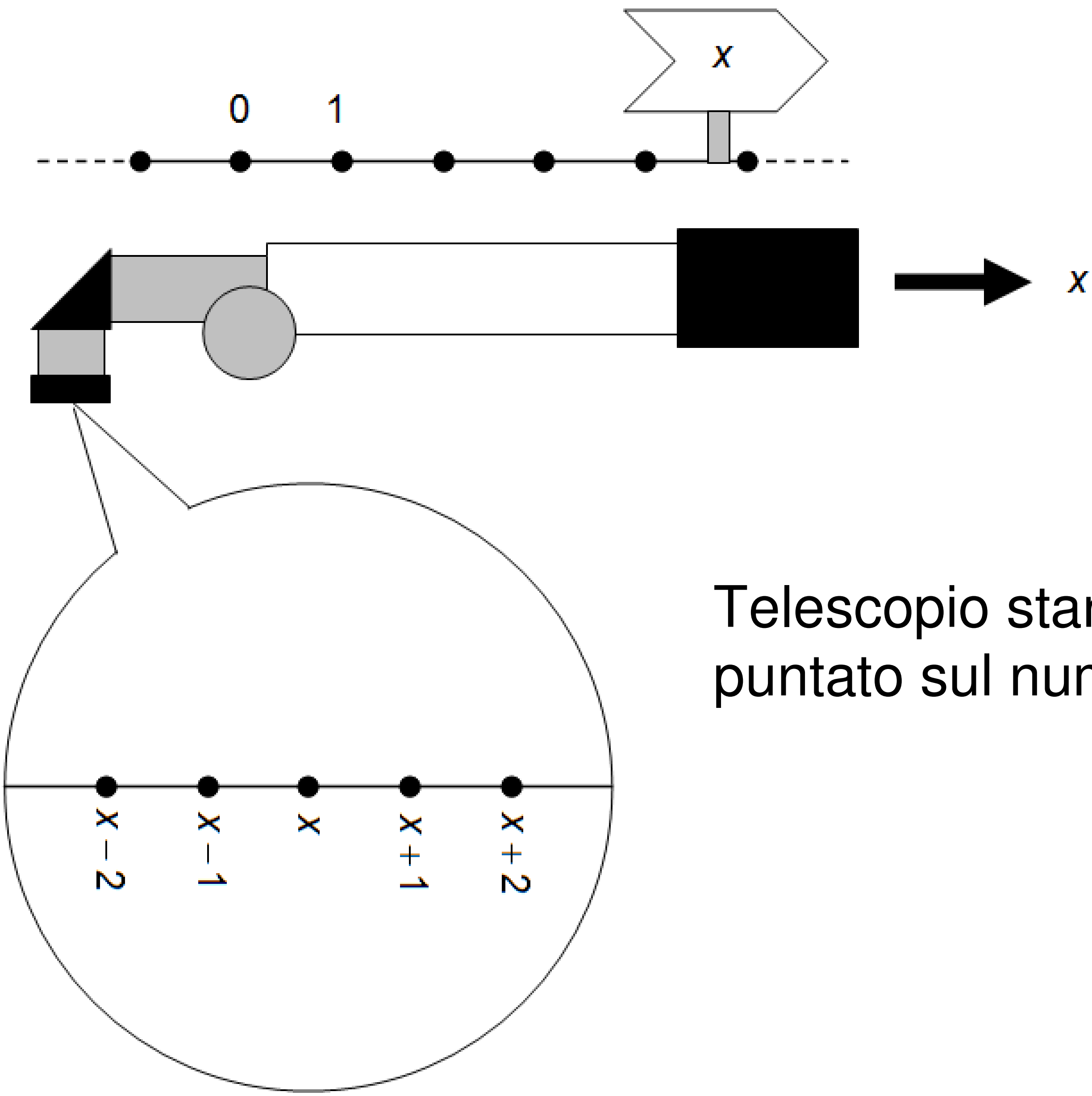
I NUMERI REALI E I SEGMENTI LA CUI MISURA È ESPRIMIBILE MEDIANTE UN NUMERO REALE POSITIVO LI CHIAMIAMO RISPETTIVAMENTE NUMERI STANDARD E SEGMENTI STANDARD. INCLUDIAMO TRA I SEGMENTI STANDARD ANCHE IL PUNTO, COME SEGMENTO NULLO.

$$\cdots -3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \cdots$$

Per scala ordinaria si intende una scala in cui lo zero e l’uno rientrano nel campo visivo e appaiono ben separati.

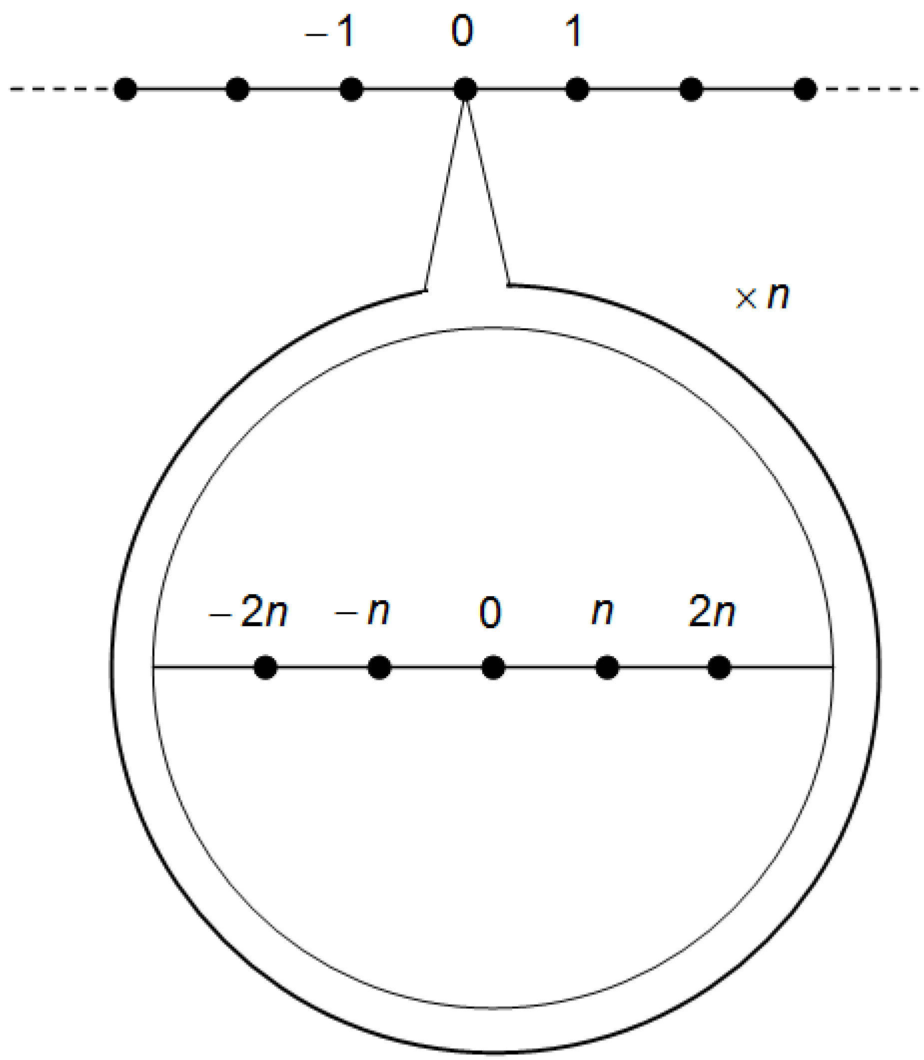
Microscopio standard a n ingrandimenti puntato sul numero x





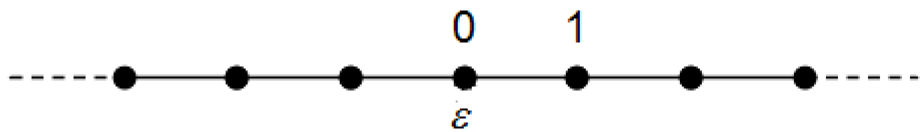
Telescopio standard puntato sul numero *x*

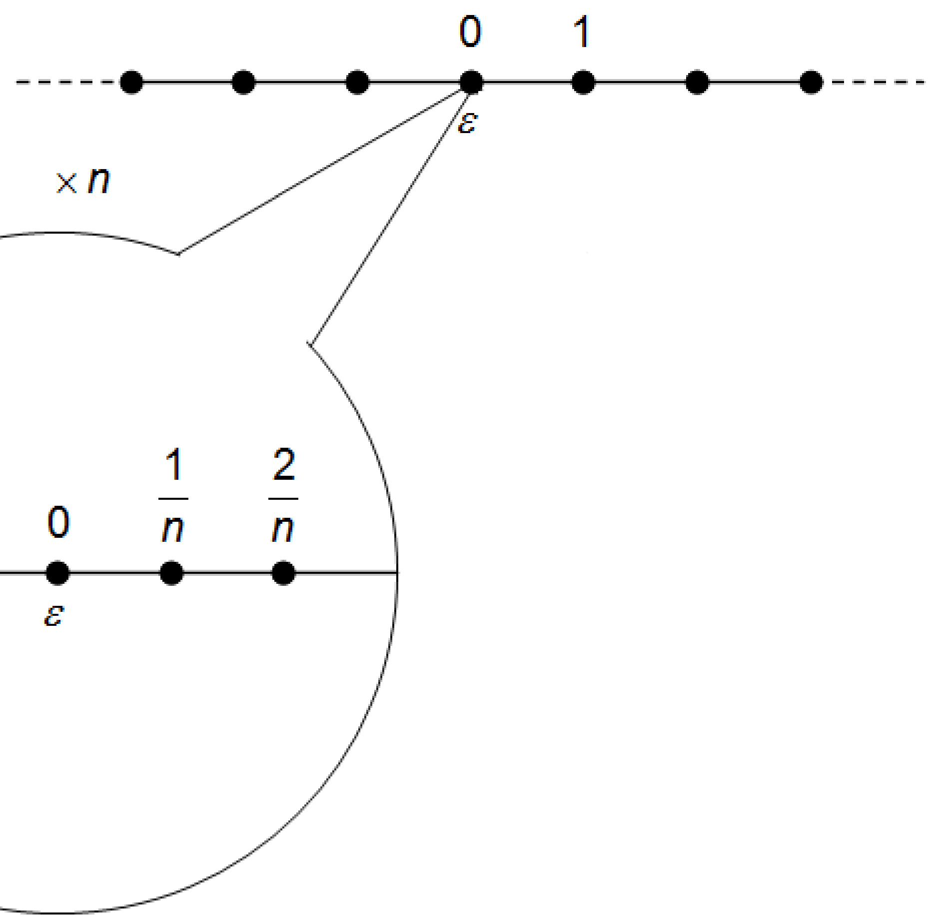
Zoom standard (all'indietro) che rimpicciolisce n volte



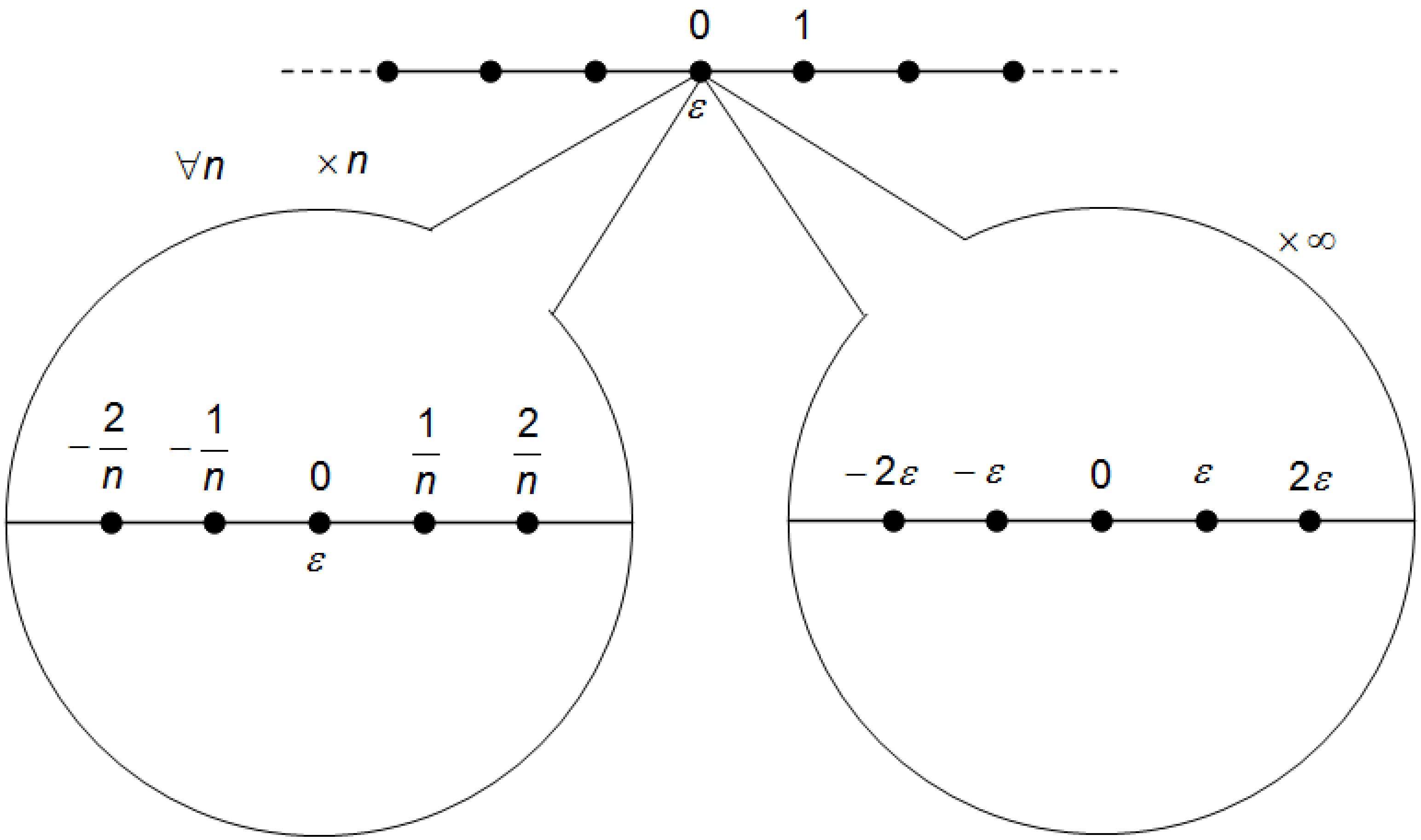
Un segmento infinitesimo è un segmento che è minore di ogni segmento standard non nullo

Un numero infinitesimo è un numero in valore assoluto minore di ogni numero standard positivo

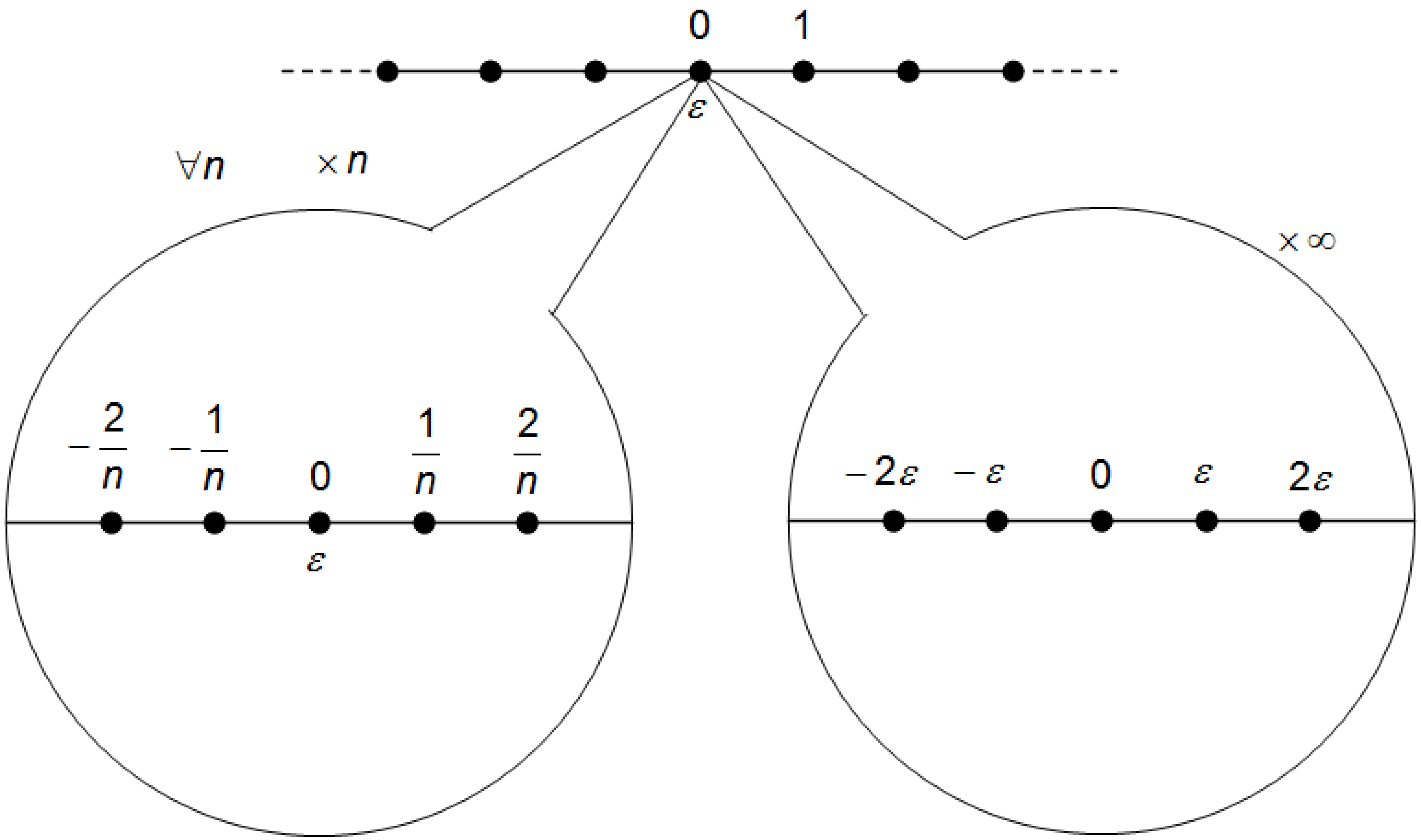

0
1
ε



0
1
ε
$\forall n$
$\times n$
$-\frac{2}{n}$
$-\frac{1}{n}$
0
$\frac{1}{n}$
$\frac{2}{n}$
ε



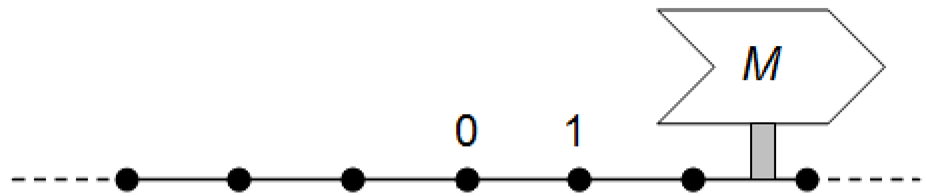
0
1
ε
∀n
×n
×∞
−2/n
−1/n
0
1/n
2/n
ε
−2ε
−ε
0
ε
2ε

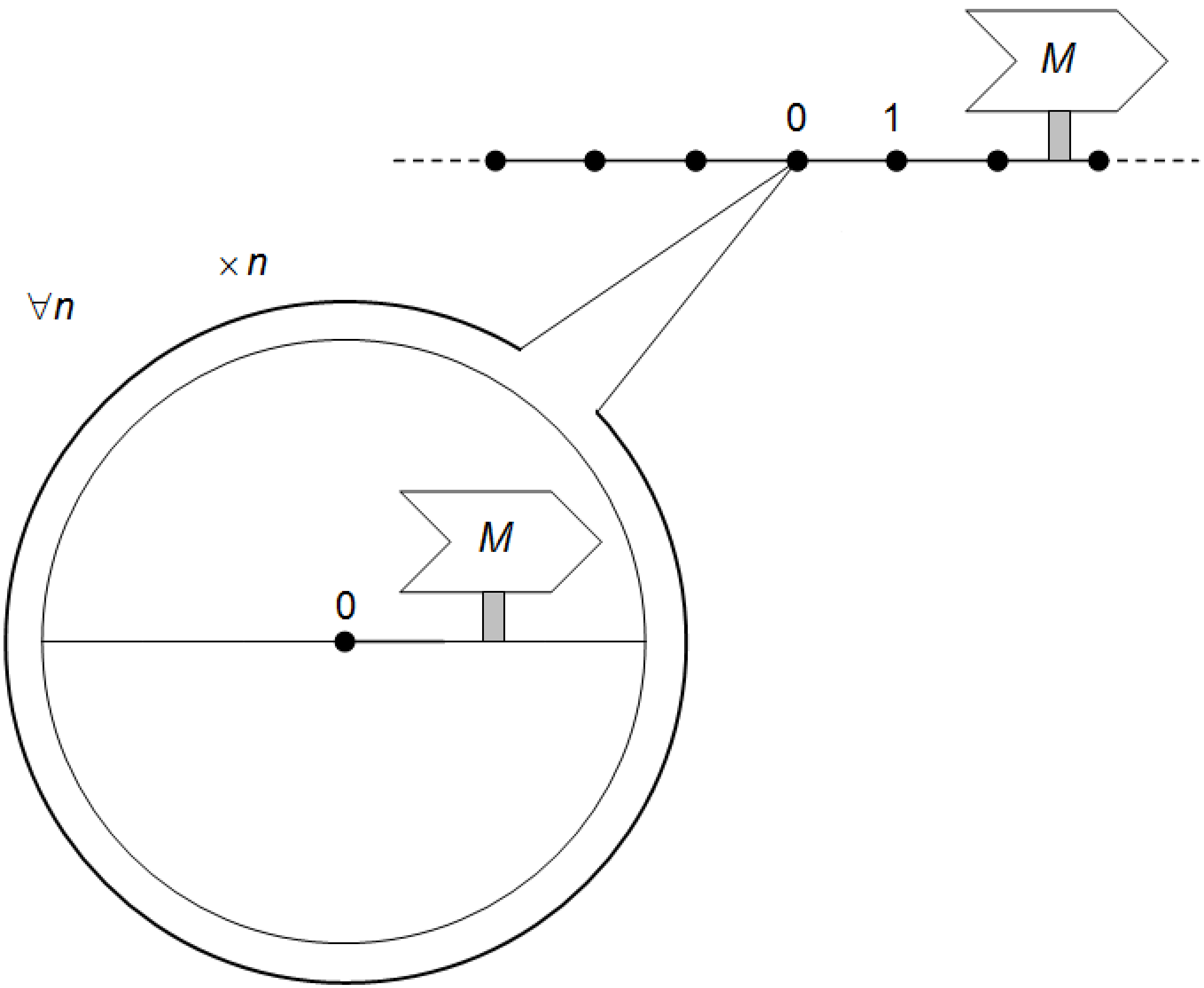


Microscopio non-standard

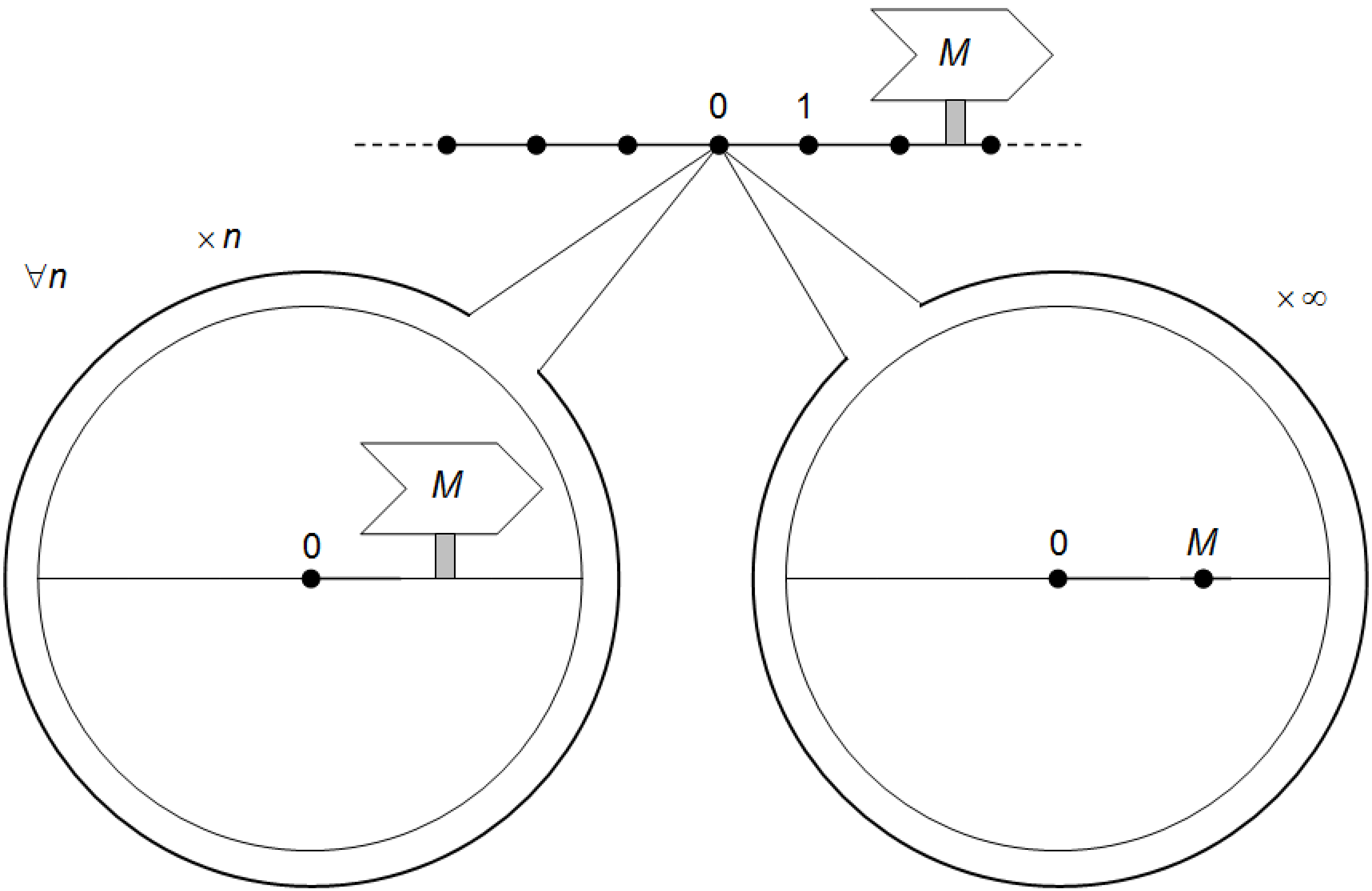
Un segmento infinito è un segmento che è maggiore di ogni segmento standard

Un numero infinito è un numero in valore assoluto maggiore di ogni numero standard


M
0
1



M
0
1
×n
∀n
M
0



Zoom non-standard

Un segmento finito è un segmento che è minore di almeno un segmento standard

Un numero finito è un numero in valore assoluto minore di almeno un numero standard

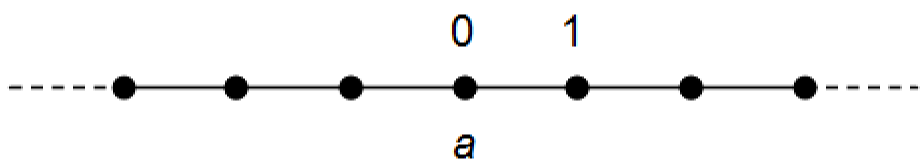
Un segmento non infinitesimo è un segmento che è maggiore di almeno un segmento standard

Un numero non infinitesimo è un numero in valore assoluto maggiore di almeno un numero standard positivo

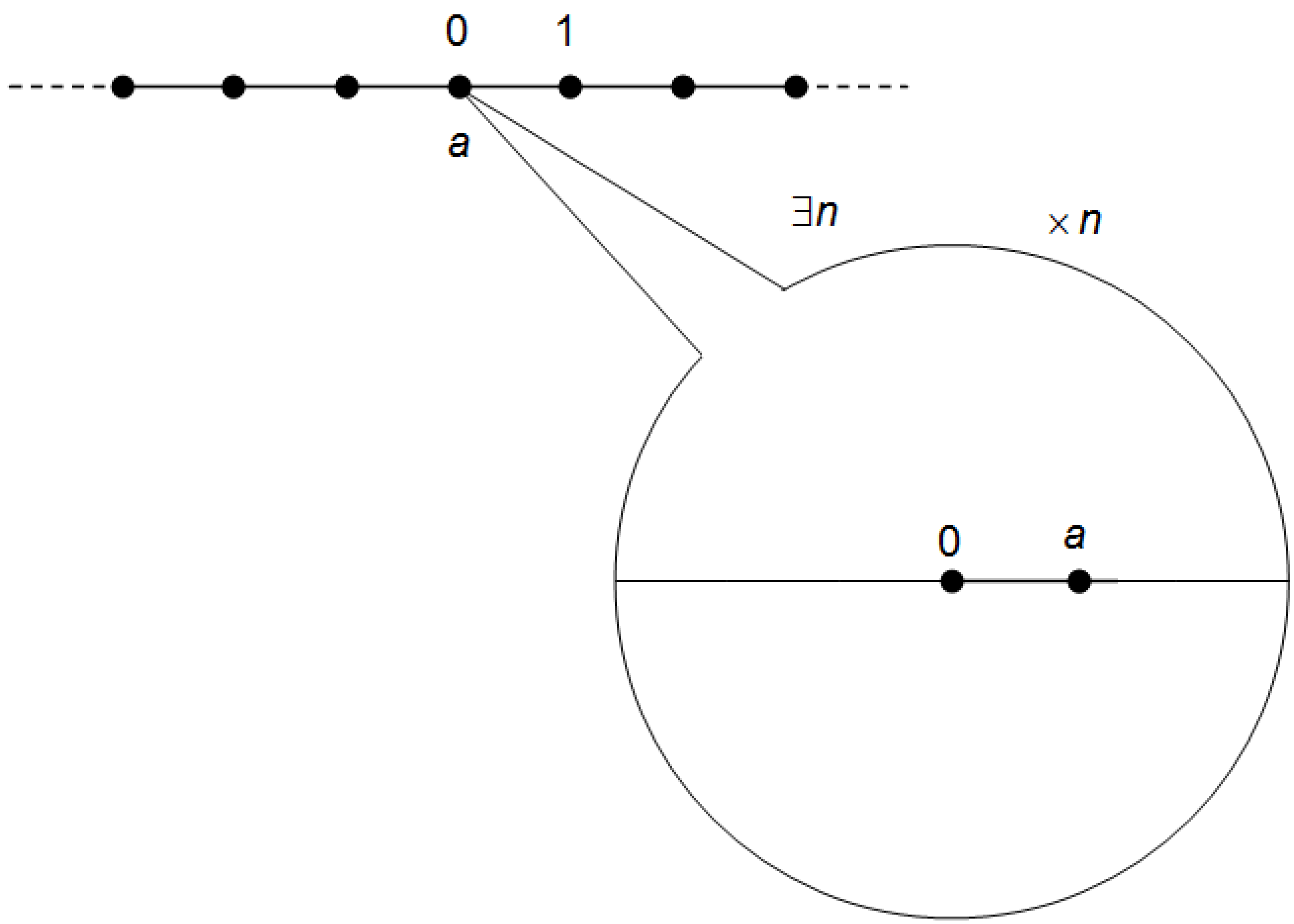
Un segmento finito non infinitesimo è un segmento che è compreso tra due segmenti standard non nulli

Un numero finito non infinitesimo è un numero in valore assoluto compreso tra due numeri standard positivi

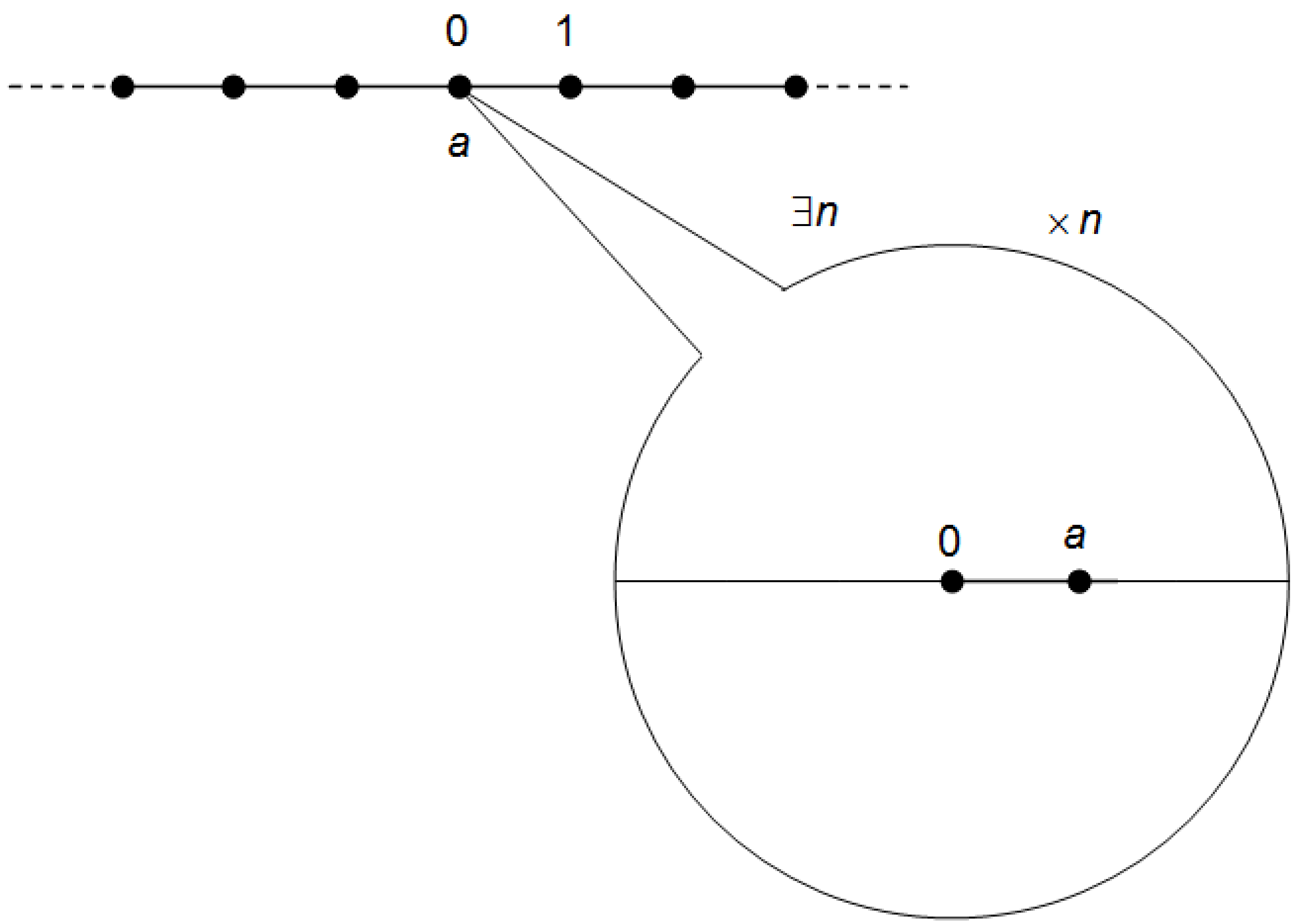
1° caso ("piccolo")



1° caso ("piccolo")

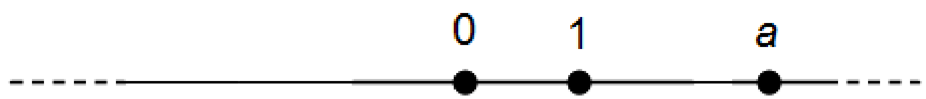


1° caso (“piccolo”)

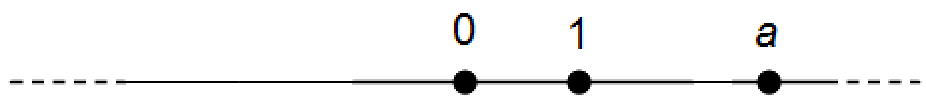


Sembra coincidere con lo zero, ma basta un microscopio standard per separarlo dallo zero

2° caso ("medio")

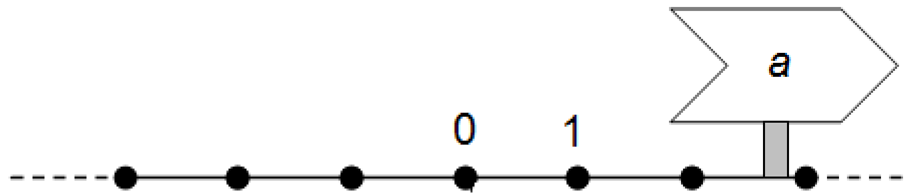


2° caso ("medio")

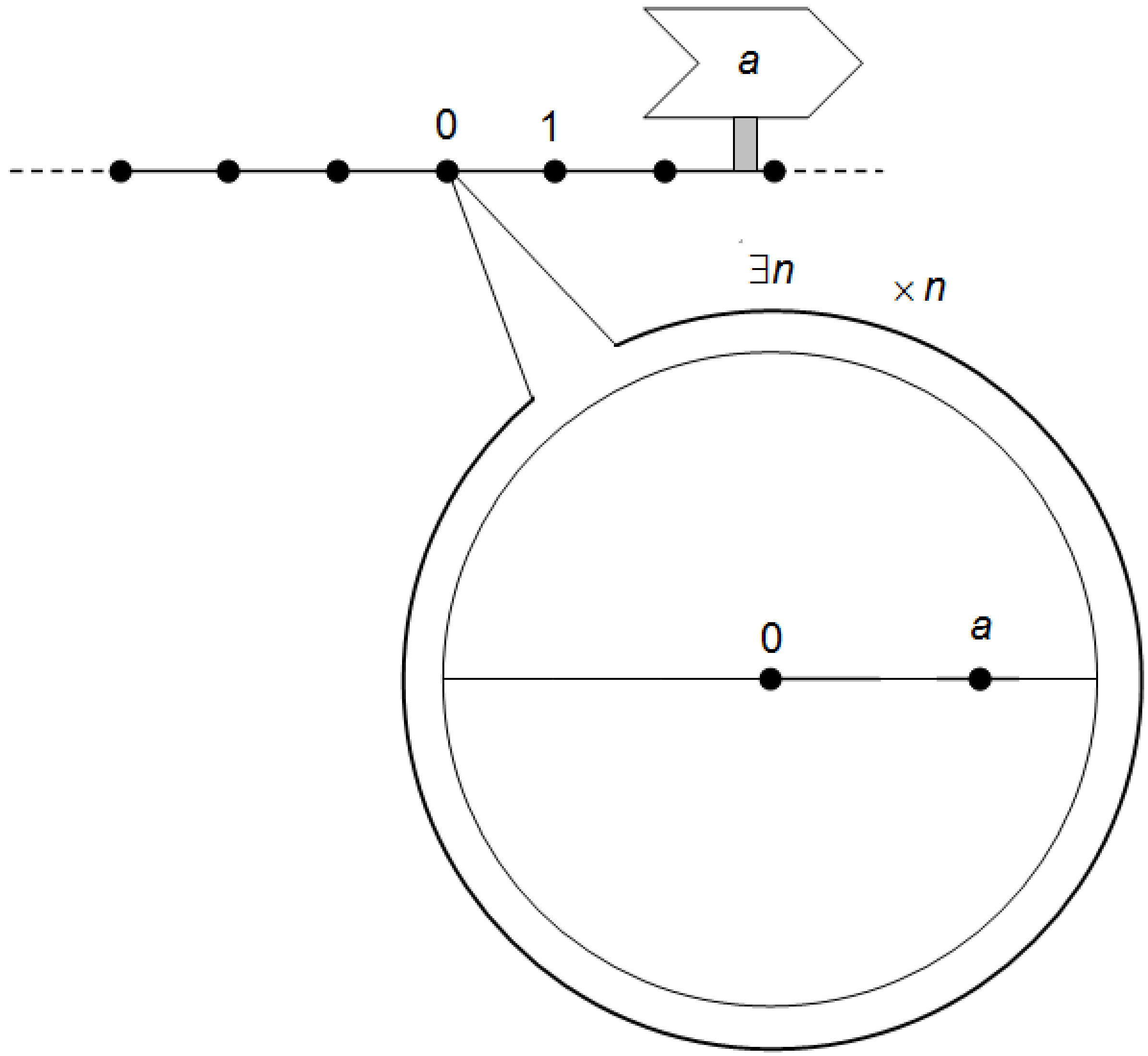


Nella scala ordinaria compare nel campo visivo e già separato dallo zero

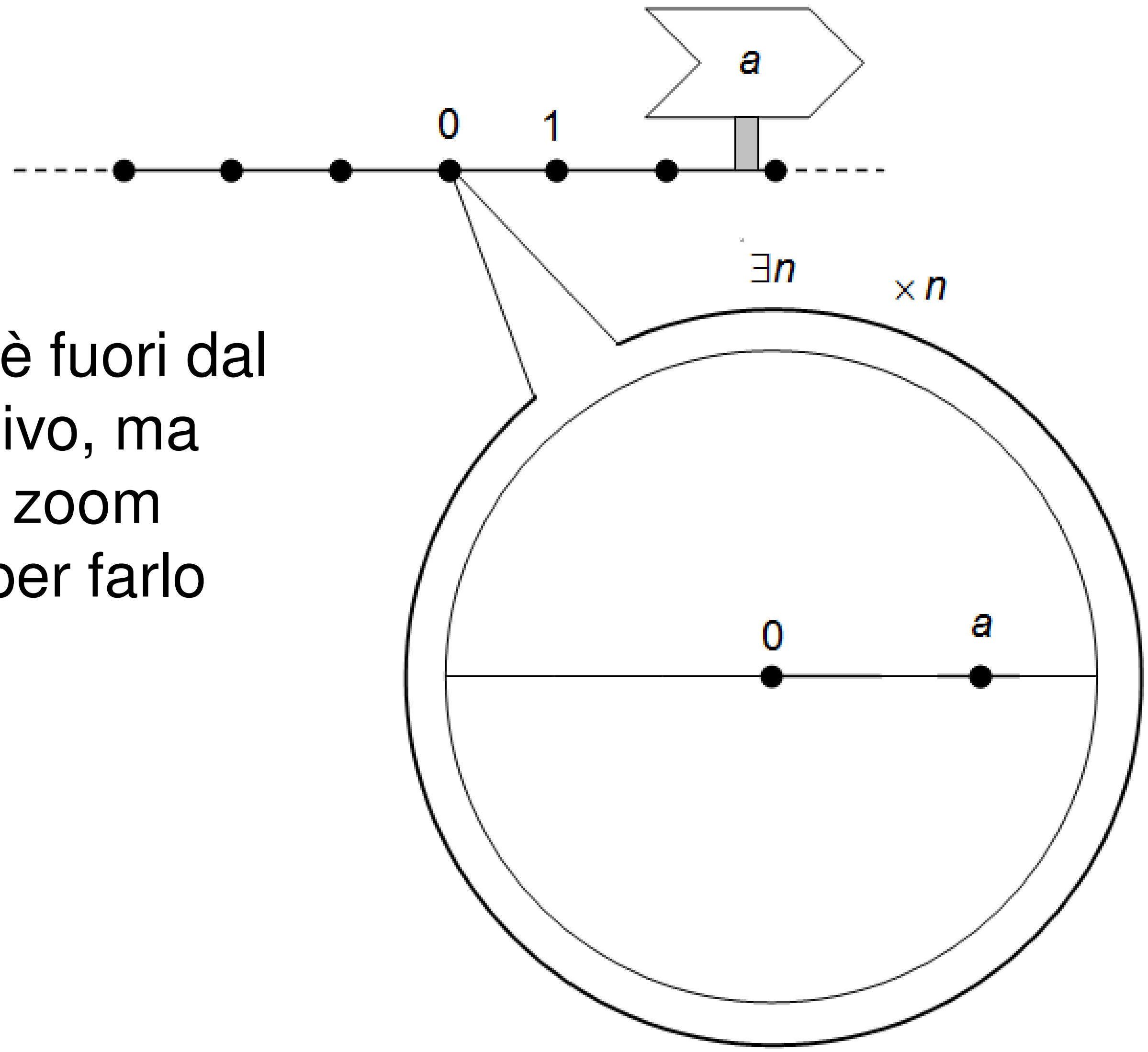
3° caso ("grande")



3° caso ("grande")

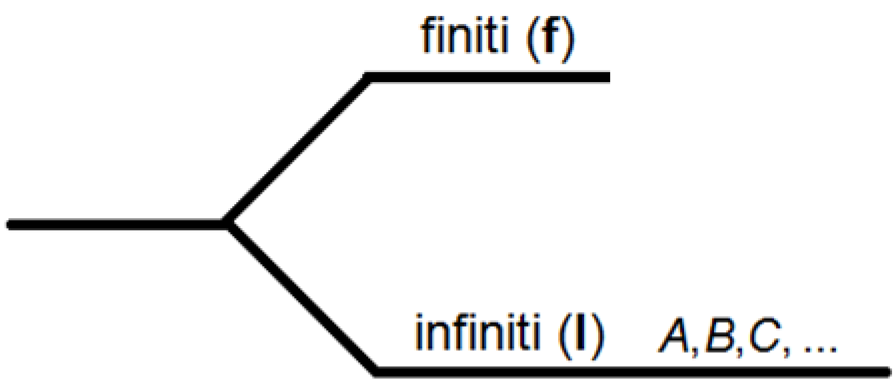


3° caso ("grande")

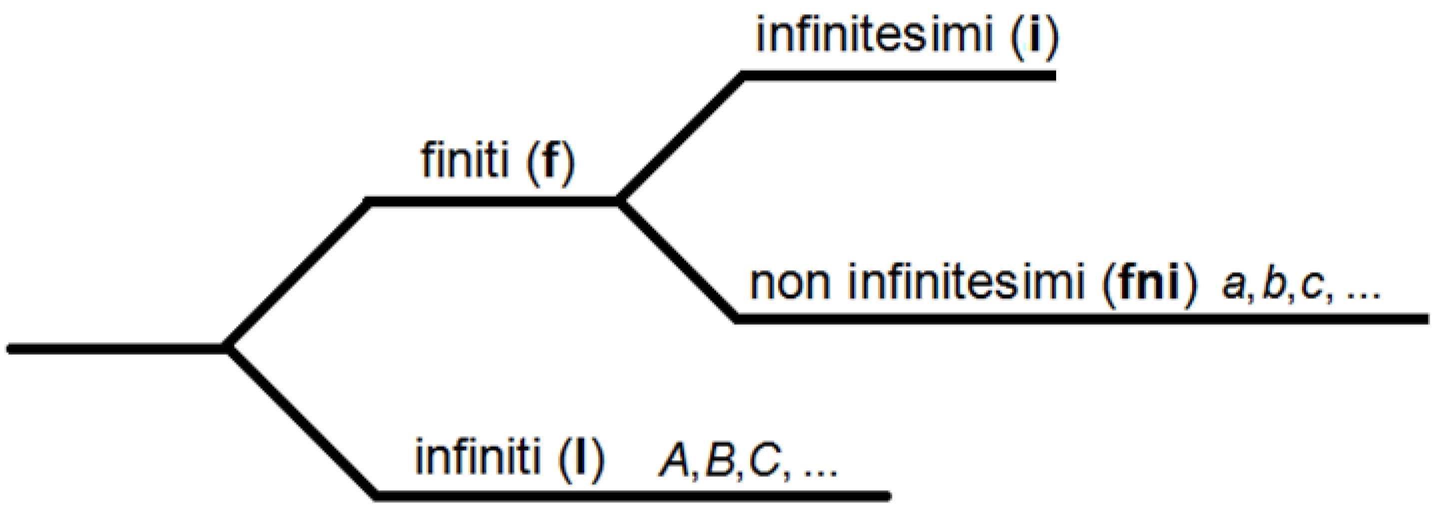


Il numero è fuori dal campo visivo, ma basta uno zoom standard per farlo rientrare

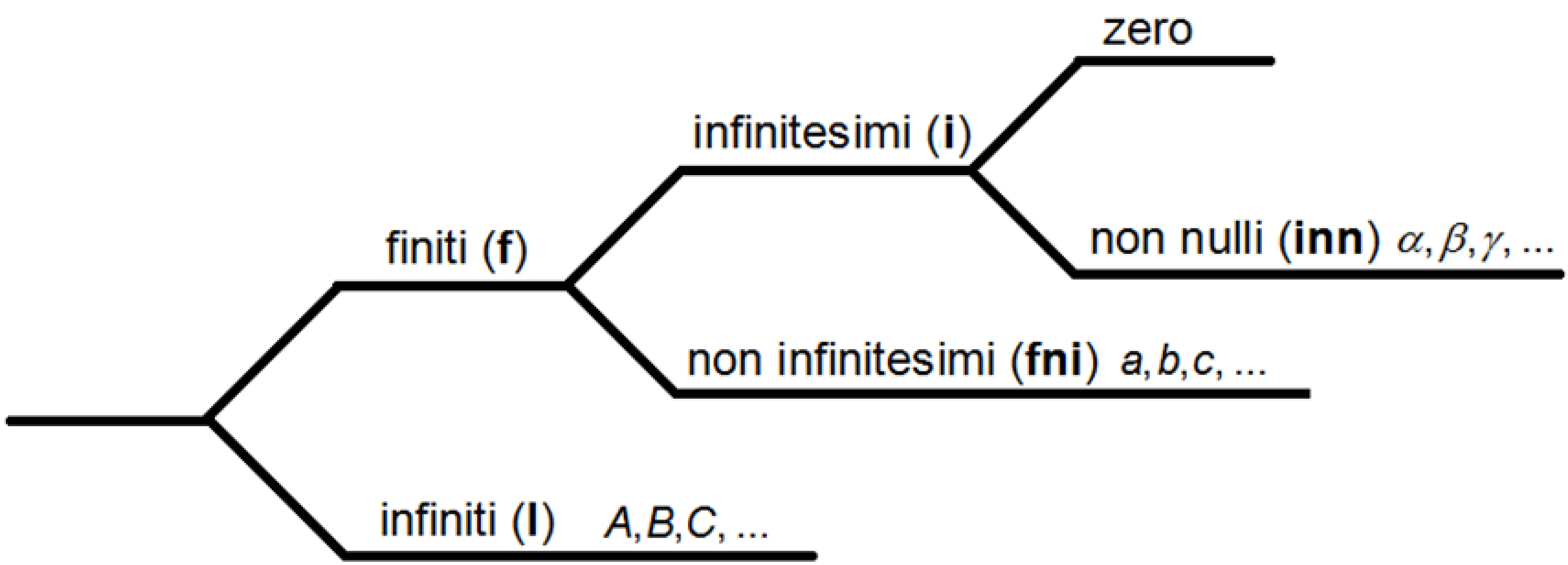
Classificazione dei numeri iperreali



Classificazione dei numeri iperreali



Classificazione dei numeri iperreali



Comportamento dei tipi iperreali con le operazioni

$$inn \pm inn = i$$
$$inn \pm fni = fni$$
$$inn \pm I = I$$
$$fni \pm fni = f$$
$$fni \pm I = I$$
$$I \pm I = ?$$

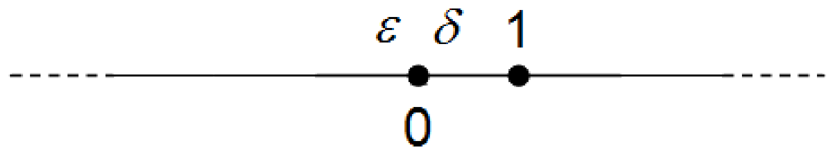
$$inn \times inn = inn$$
$$inn \times fni = inn$$
$$inn \times I = ?$$
$$fni \times fni = fni$$
$$fni \times I = I$$
$$I \times I = I$$

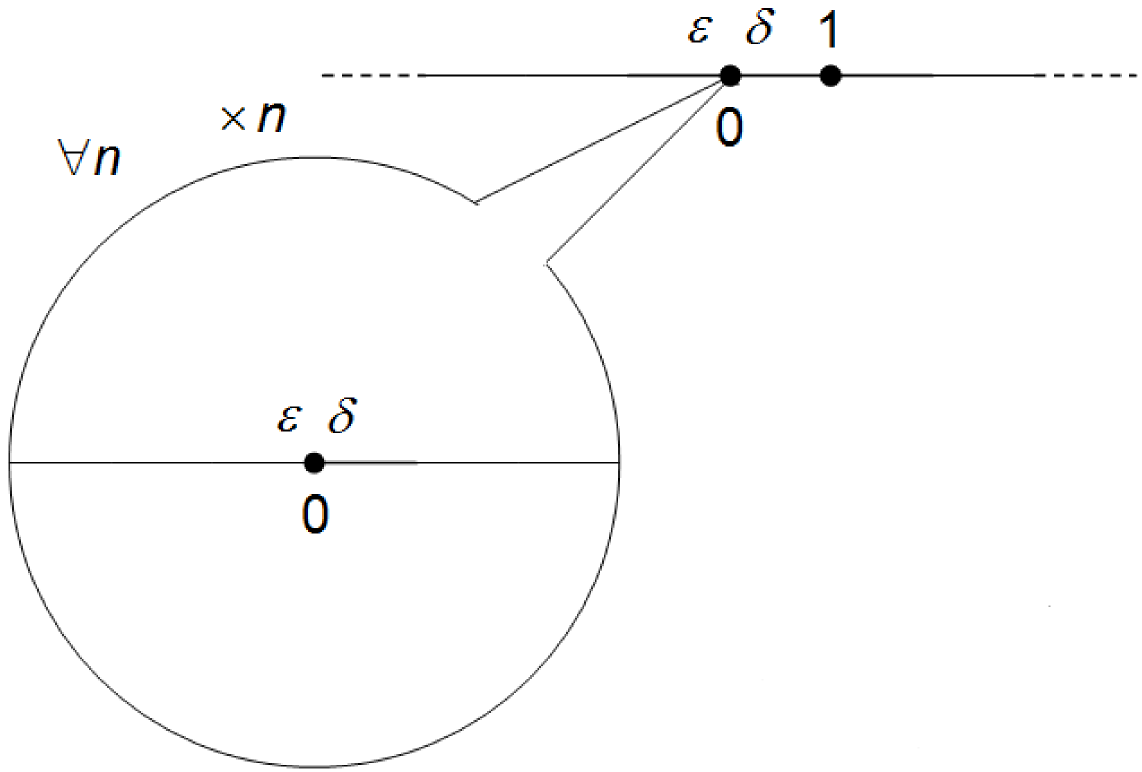
$$inn : inn = ?$$
$$inn : fni = inn$$
$$inn : I = inn$$
$$fni : inn = I$$
$$fni : fni = fni$$
$$fni : I = inn$$
$$I : inn = I$$
$$I : fni = I$$
$$I : I = ?$$

Confronto di infinitesimi

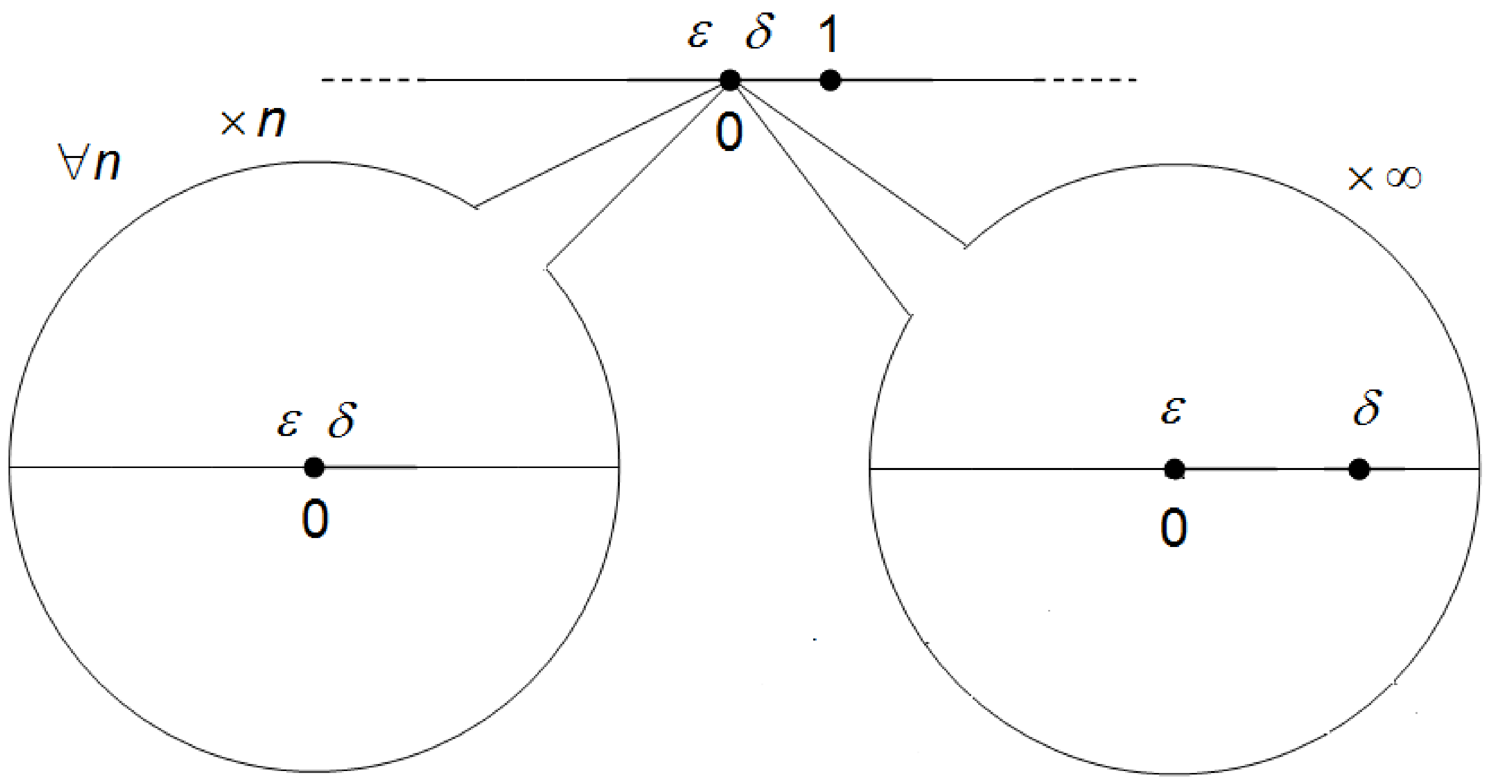
$\frac{\varepsilon}{\delta} =$

- *inn* ε è di ordine superiore a δ
- *fni* ε è dello stesso ordine di δ
- *l* ε è di ordine inferiore a δ

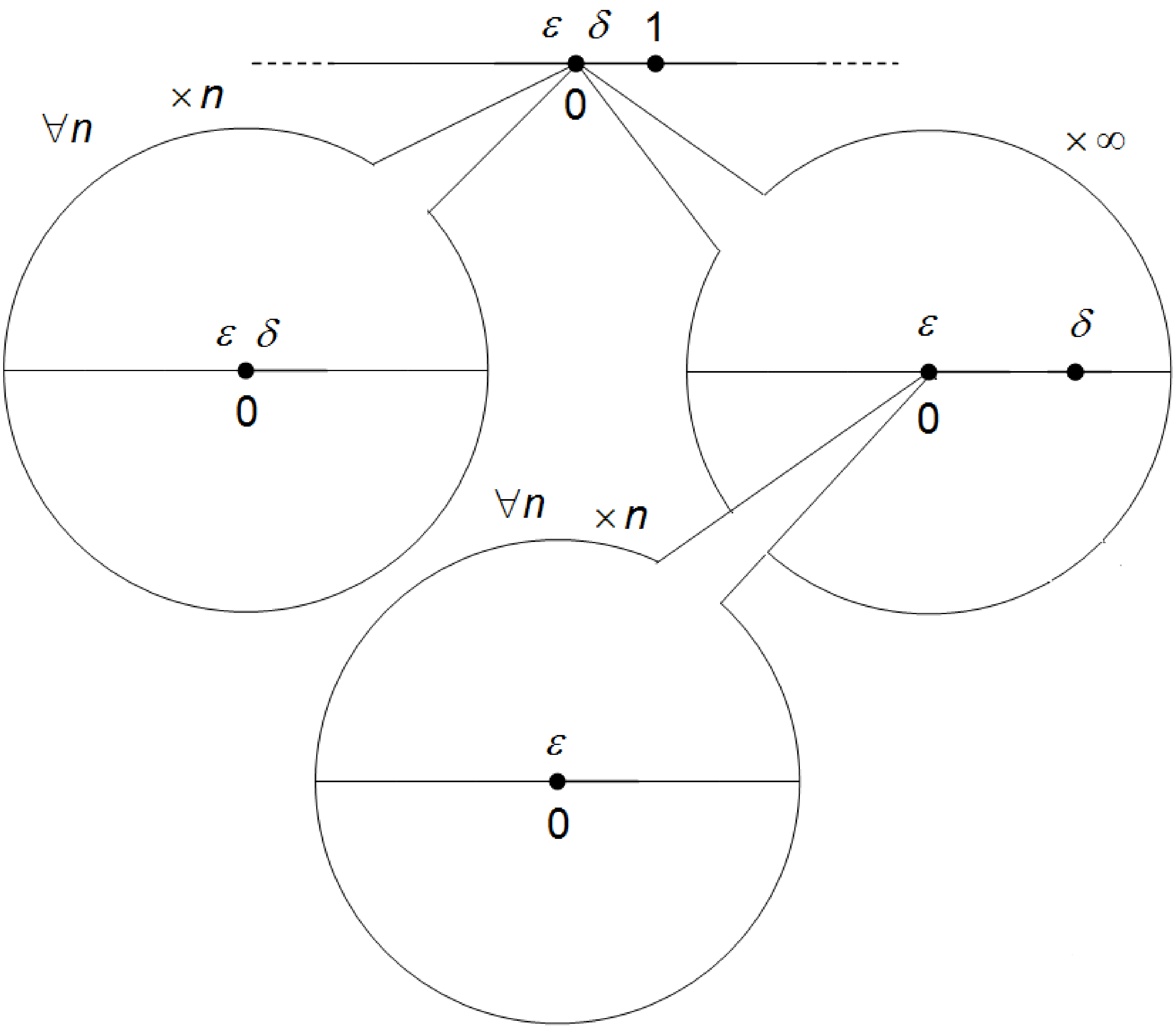

ε δ 1
0



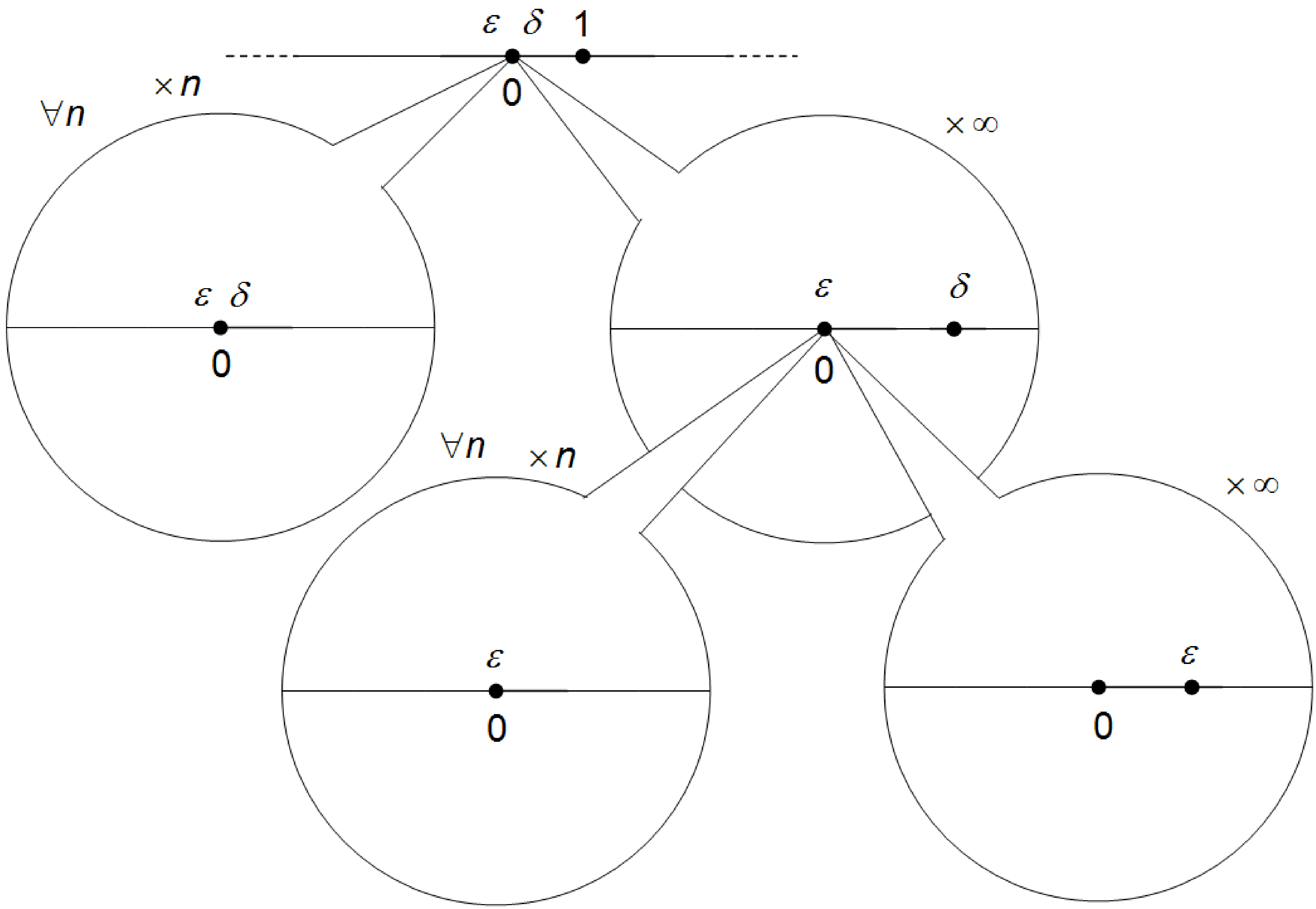
ε δ 1
0
×n
∀n
ε δ
0



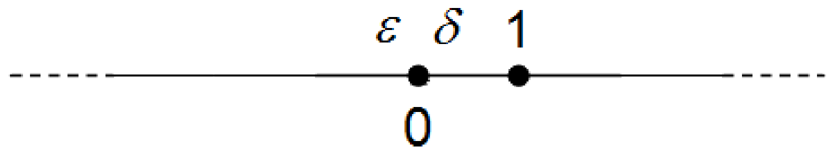
ε δ 1
0
$\times n$
$\forall n$
$\times \infty$
ε δ
0
ε
δ
0



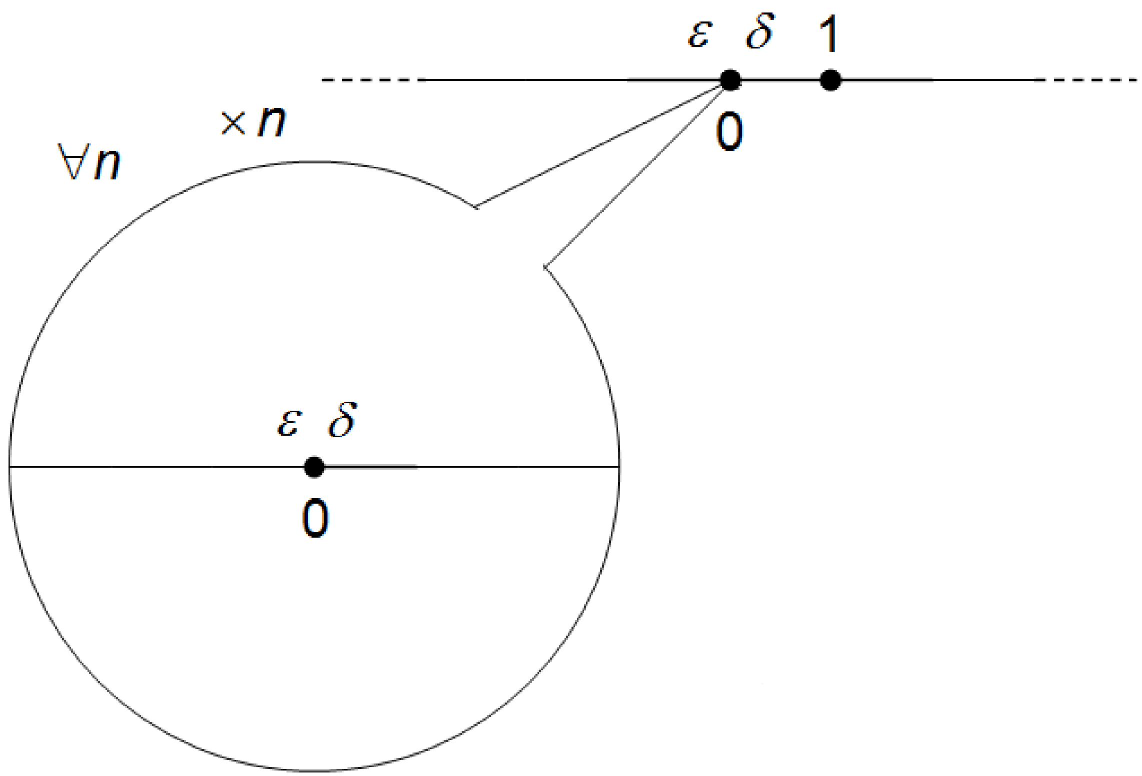
ε δ 1
0
$\times n$
$\forall n$
$\times \infty$
ε δ
0
ε
δ
0
$\forall n$
$\times n$
ε
0



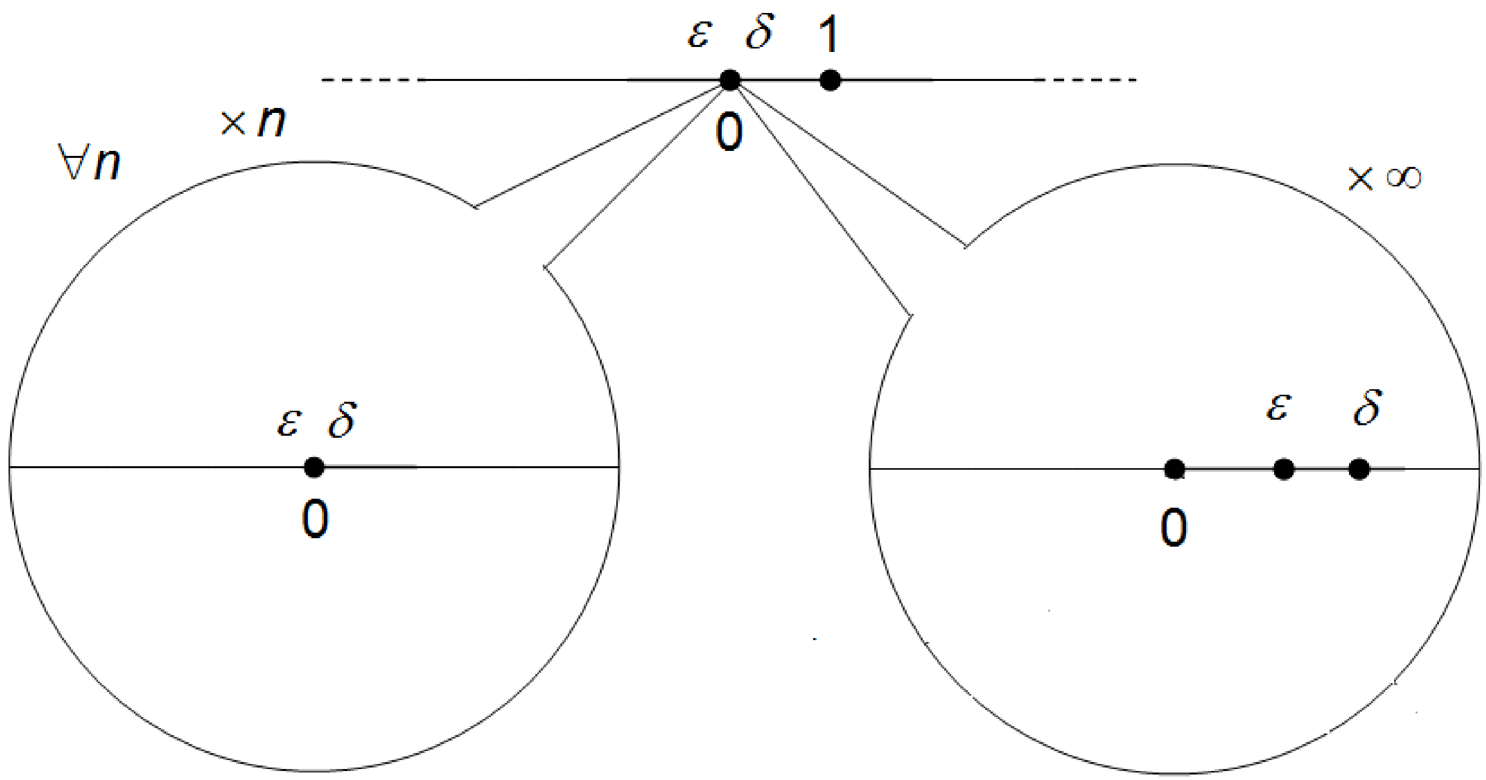
ε δ 1
0
× n
∀n
× ∞
ε δ
0
ε δ
0
∀n × n
× ∞
ε
0
ε
0



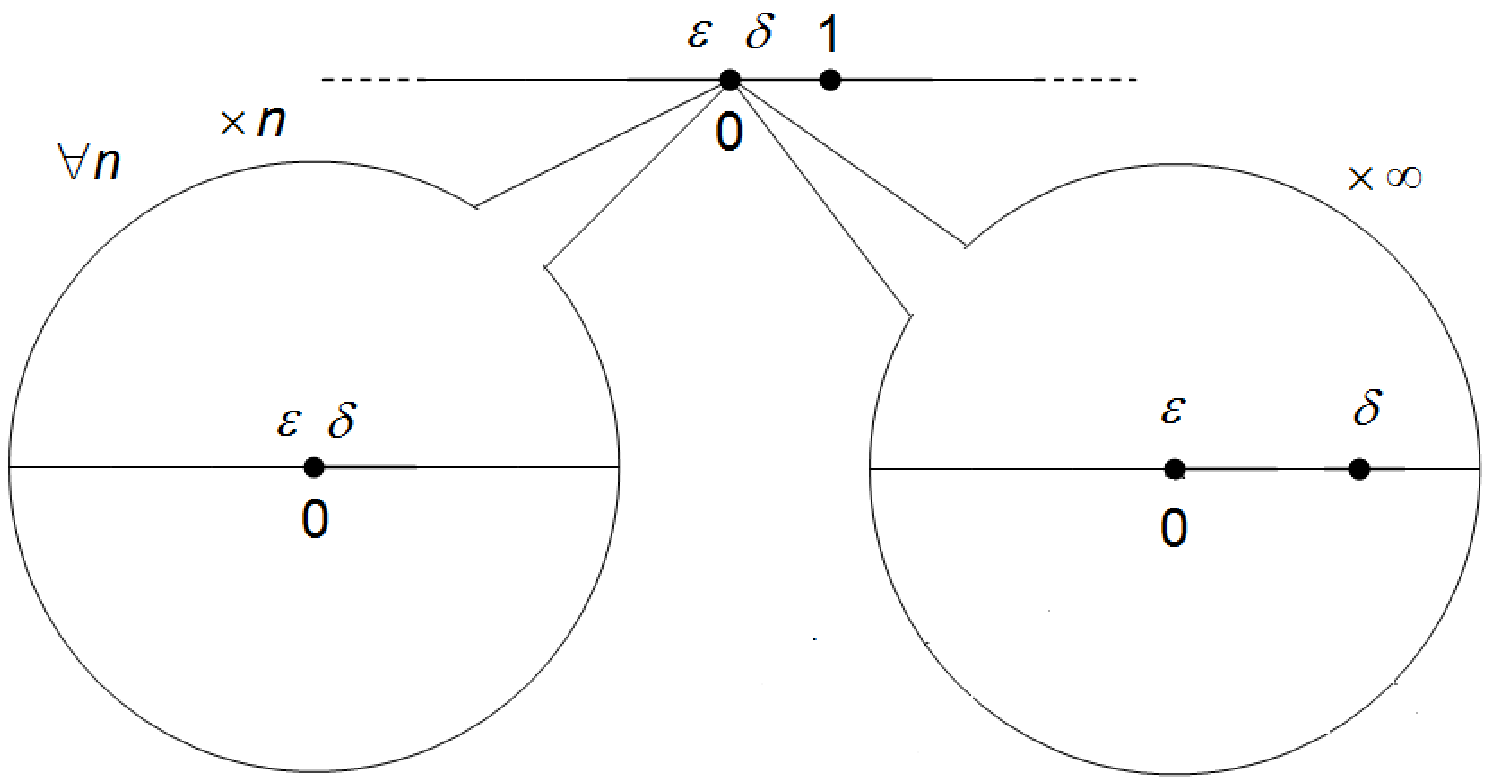
ε
δ
1
0



ε δ 1
0
× n
∀n
ε δ
0

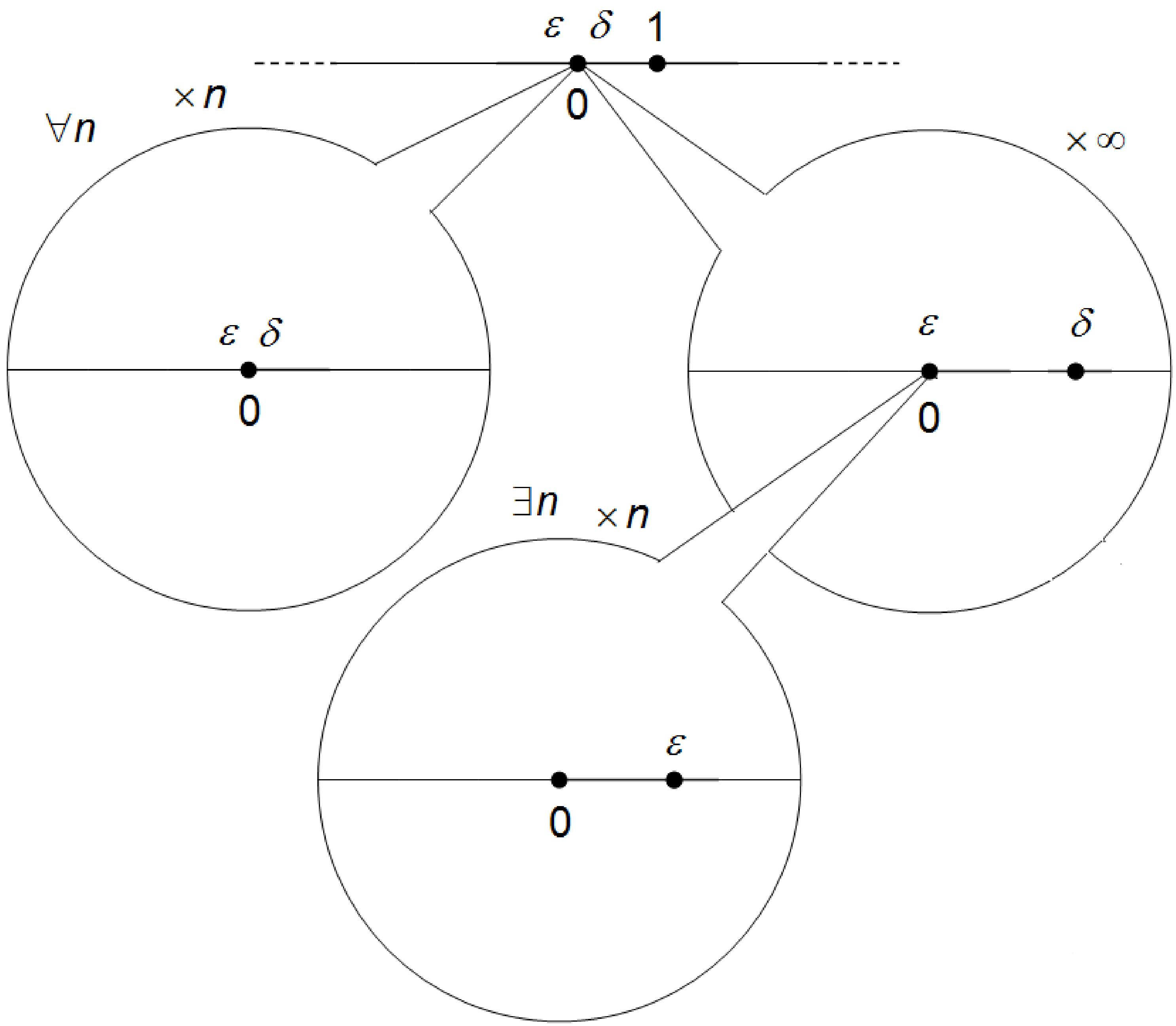


1° caso



ε δ 1
0
$\times n$
$\forall n$
$\times\infty$
ε δ
0
ε
δ
0

2° caso



ε δ 1
0
× n
∀n
× ∞
ε δ
0
ε δ
0
∃n × n
ε
0

Due numeri si dicono infinitamente vicini se la loro differenza è un infinitesimo.

$$x \approx y$$

Si chiama monade del numero *x* l'insieme dei numeri infinitamente vicini a *x*.

$$mon(x)$$

Se nella scala ordinaria puntiamo un microscopio non-standard sul numero *x*, vediamo una parte della monade di *x*.

La monade dello zero si chiama monade principale e coincide con l’insieme dei numeri infinitesimi.

Un numero x è infinitesimo quando

$$x \approx 0$$

Ogni numero finito x è infinitamente vicino a un unico numero standard s. In altre parole, nella monade di un numero finito x esiste un unico numero standard s.

Ogni numero finito si può scrivere in modo unico nella forma

$$x = s + \varepsilon$$

dove ε è eventualmente nullo.

s è la parte standard di x, mentre ε è la parte infinitesima di x.

Due numeri si dicono a distanza finita o finitamente vicini se la loro differenza è un numero finito.

$$x \cong y$$

Si chiama galassia del numero x l'insieme dei numeri finitamente vicini a x.

$$Gal\,(x)$$

Nella scala ordinaria, con un telescopio standard vedo solo numeri della stessa galassia.

La galassia dello zero si chiama galassia principale e coincide con l'insieme dei numeri finiti.

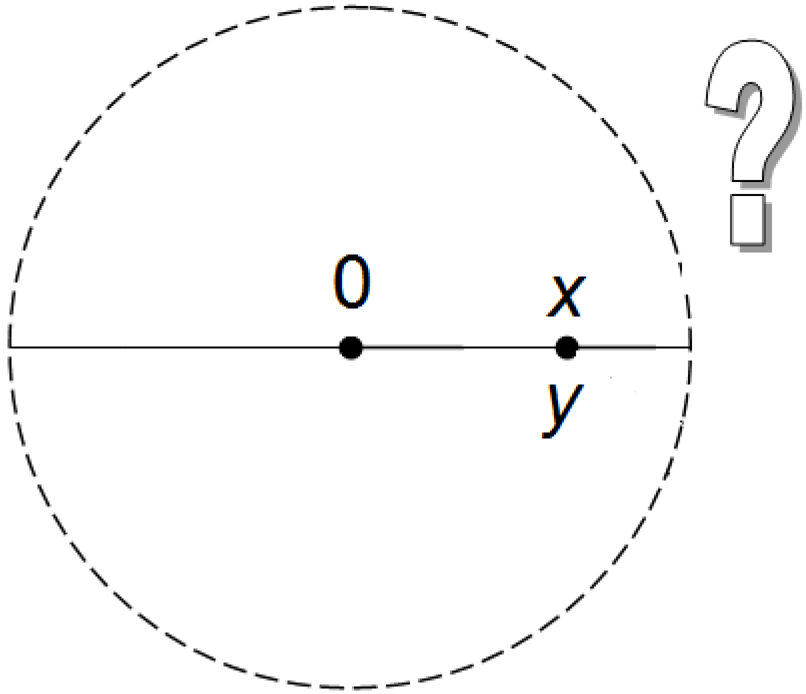
Un numero è finito quando

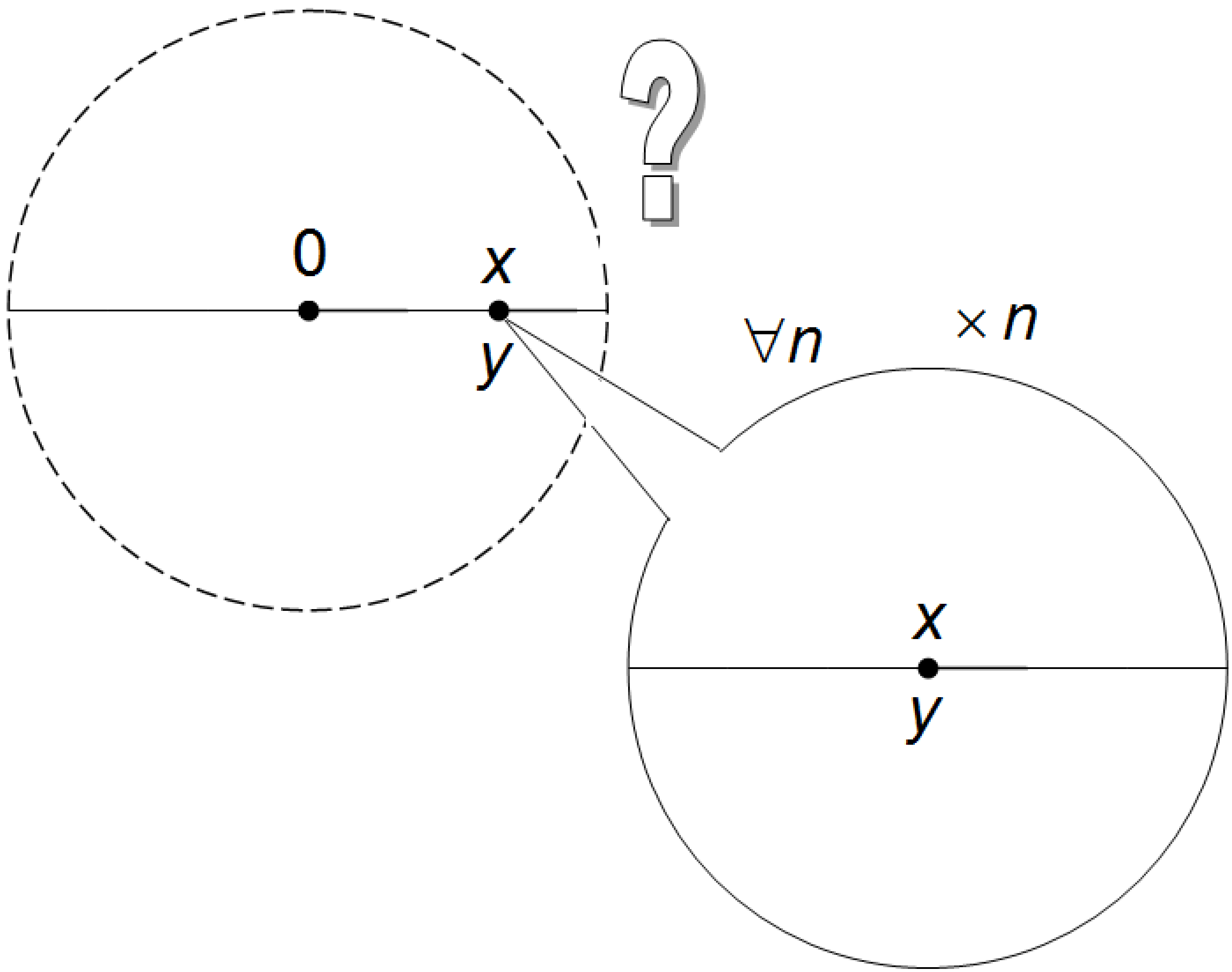
$$x \cong 0$$

Due numeri **non nulli** si dicono indistinguibili se la loro differenza è infinitesima rispetto a ciascuno di essi o, in modo equivalente, se il loro rapporto è infinitamente vicino a 1.

$$x \sim y$$

$$\frac{x-y}{x} \approx 0 \qquad \frac{x-y}{y} \approx 0 \qquad \frac{x}{y} \approx 1$$


0
x
y
?



0
x
y
∀n
× n
x
y

Ai fini di ottenere un risultato indistinguibile, possiamo trascurare degli addendi secondo le regole seguenti:

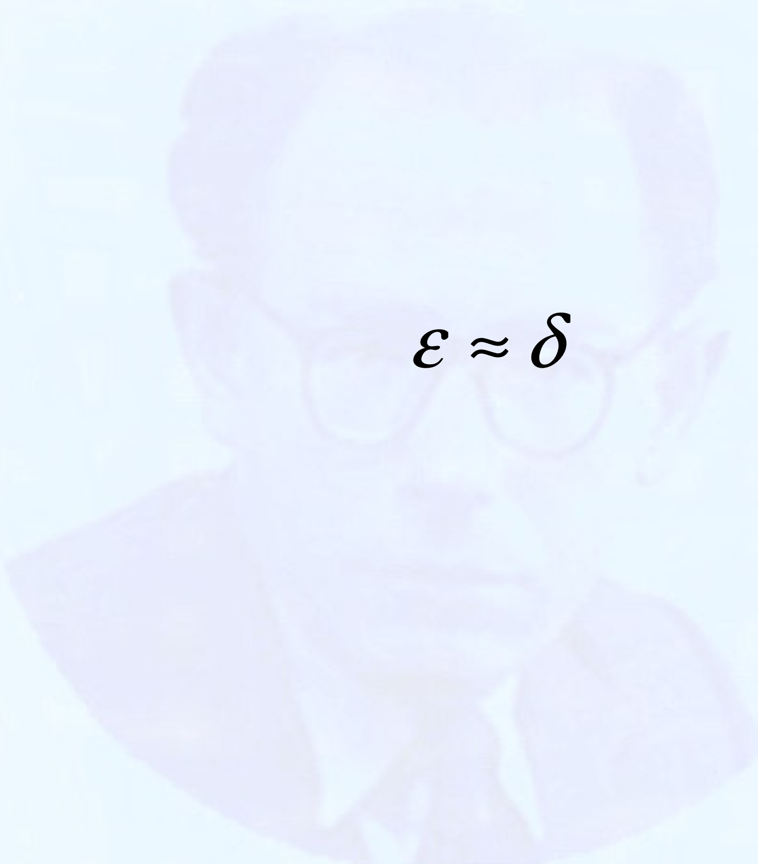
$$\varepsilon + \delta \sim \varepsilon \quad \text{se} \quad \delta = o(\varepsilon)$$

$$a + \varepsilon \sim a$$

$$M + \varepsilon \sim M$$

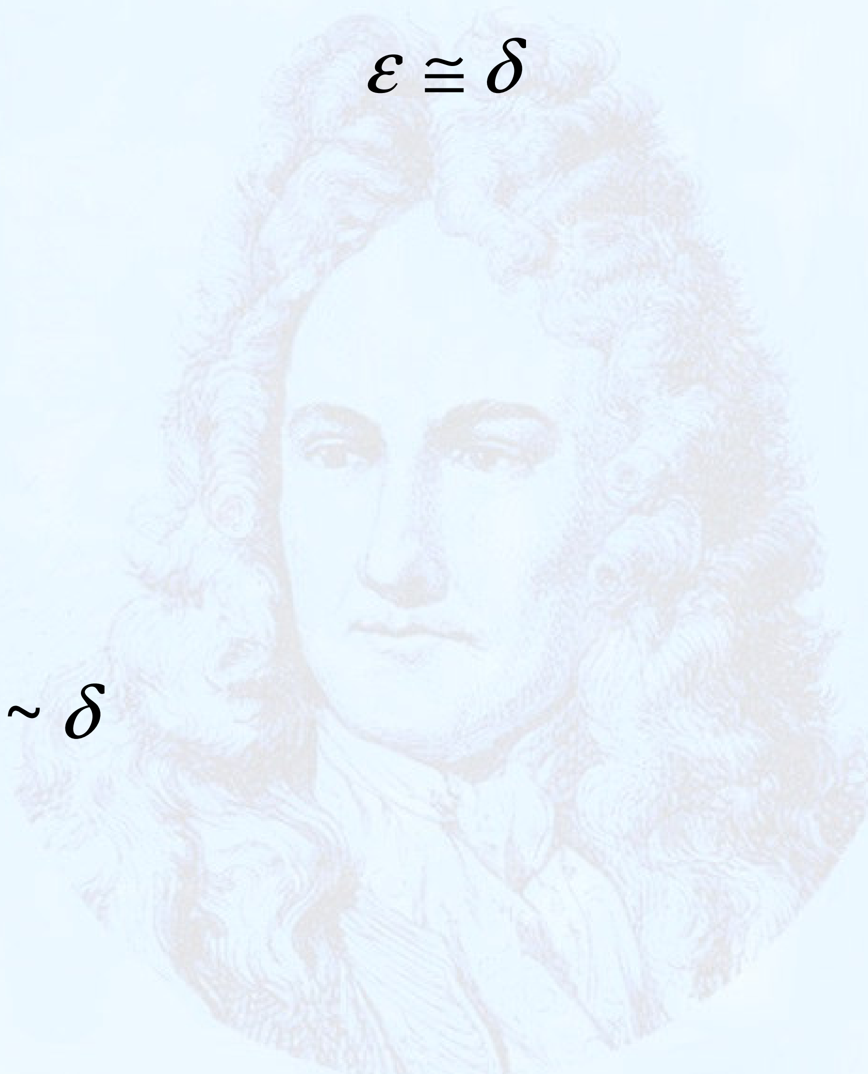
$$M + a \sim M$$

$$M + N \sim M \quad \text{se} \quad N << M$$

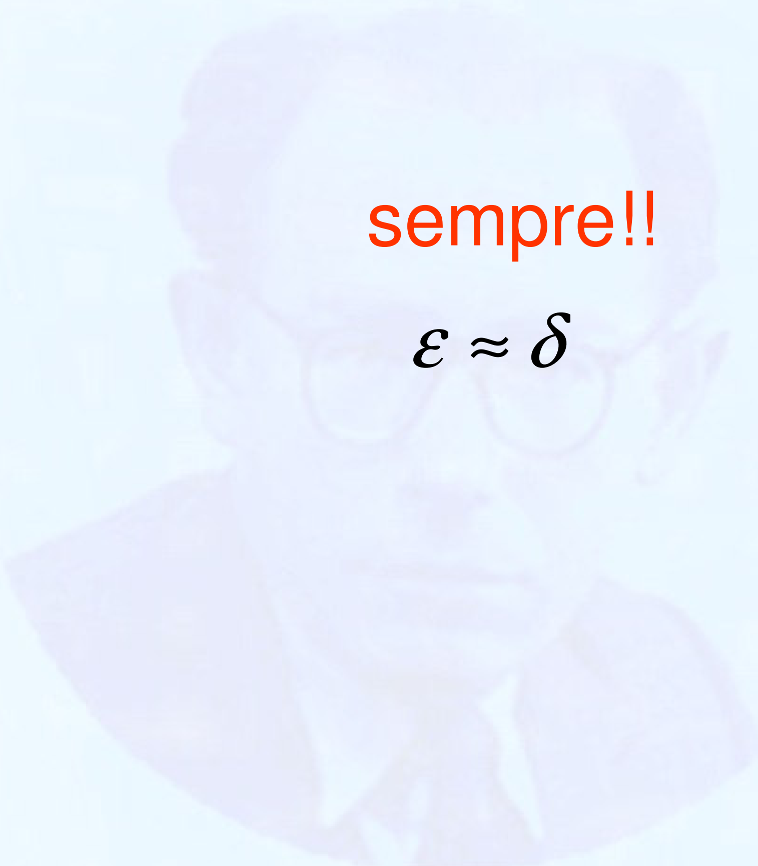


$$\varepsilon \approx \delta$$

$$\varepsilon \cong \delta$$

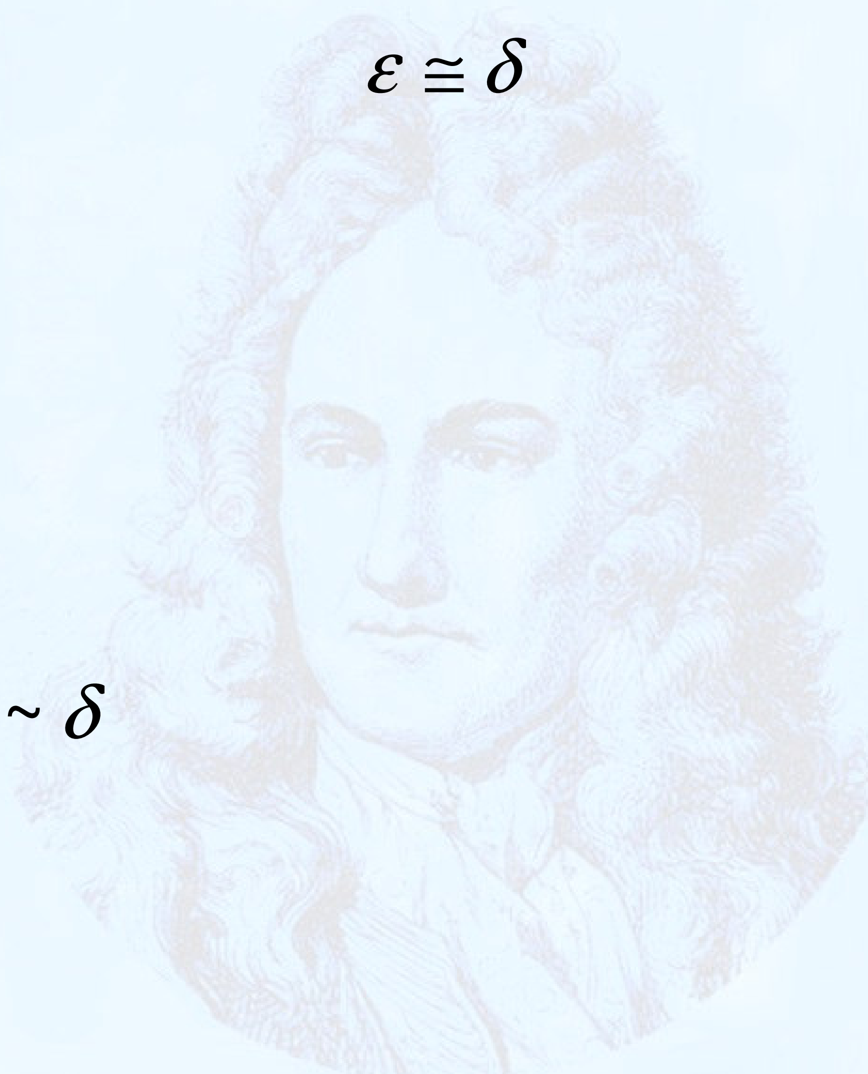


$$\varepsilon \sim \delta$$



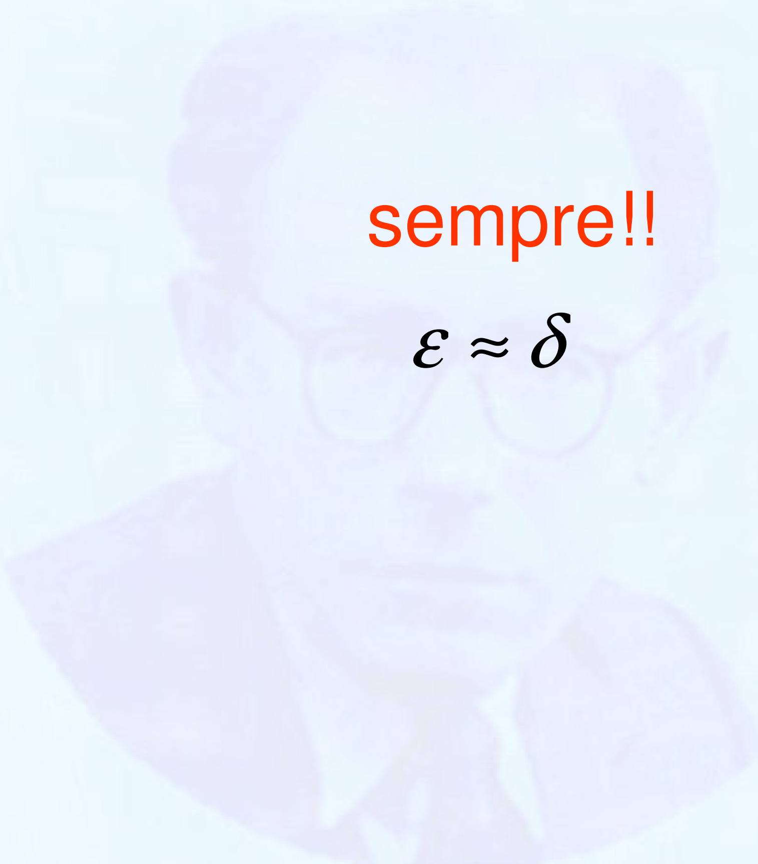
sempre!!

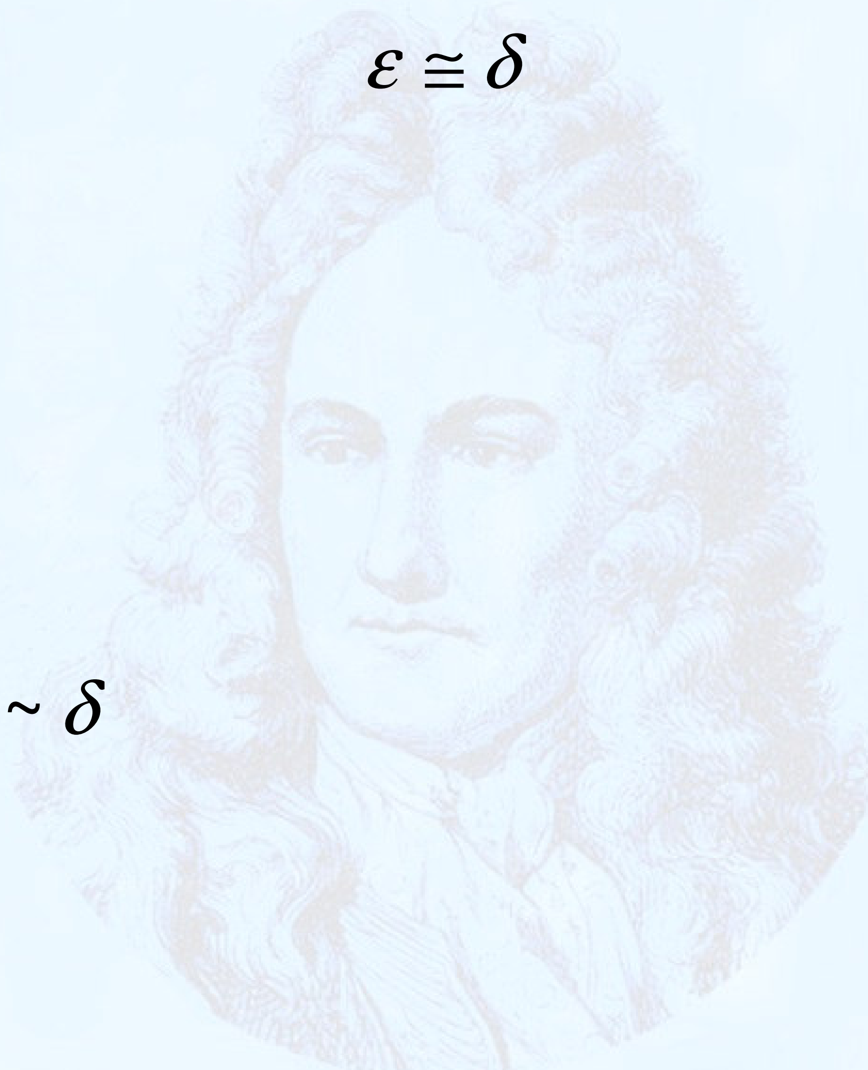
$\varepsilon \approx \delta$



$\varepsilon \cong \delta$

$\varepsilon \sim \delta$





sempre!!

$$\varepsilon \approx \delta$$

sempre!!

$$\varepsilon \cong \delta$$

$$\varepsilon \sim \delta$$

sempre!!

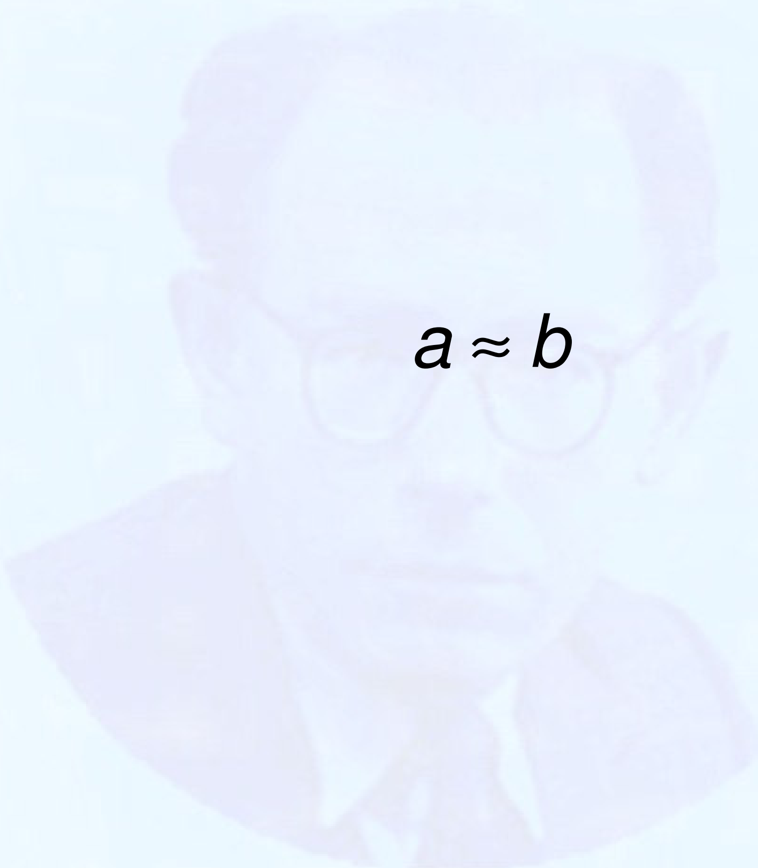
$$\varepsilon \approx \delta$$

sempre!!

$$\varepsilon \cong \delta$$

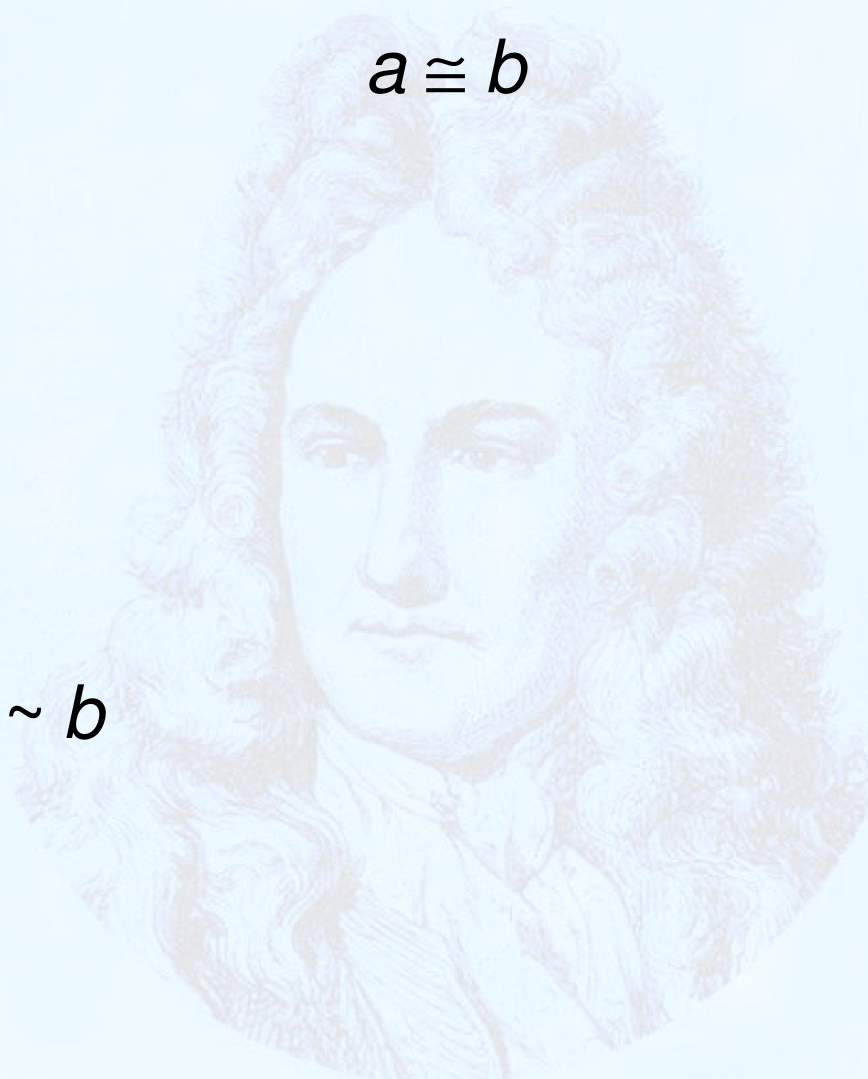
$$\varepsilon \sim \delta$$

più forte che essere dello stesso ordine

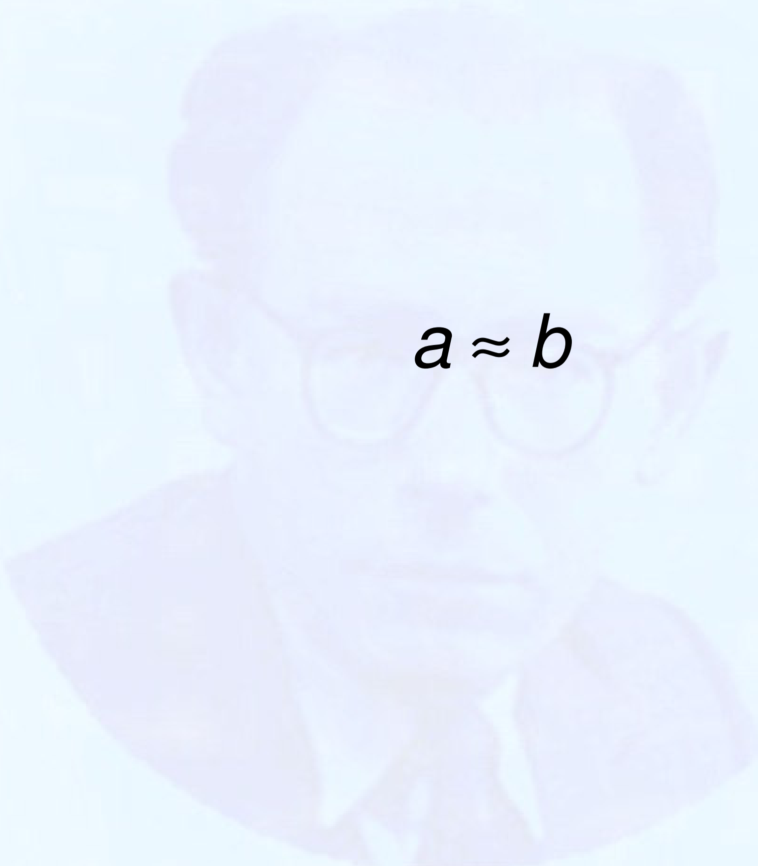


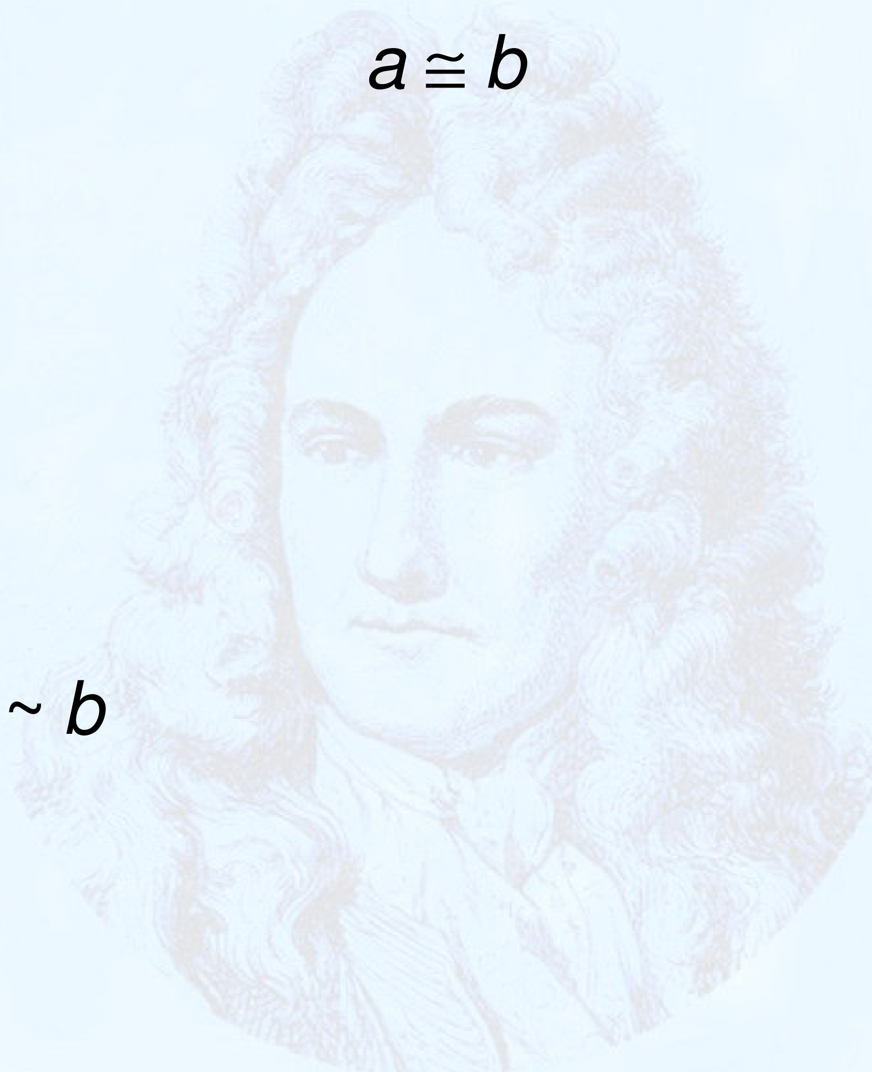
$a \approx b$

$a \cong b$



$a \sim b$



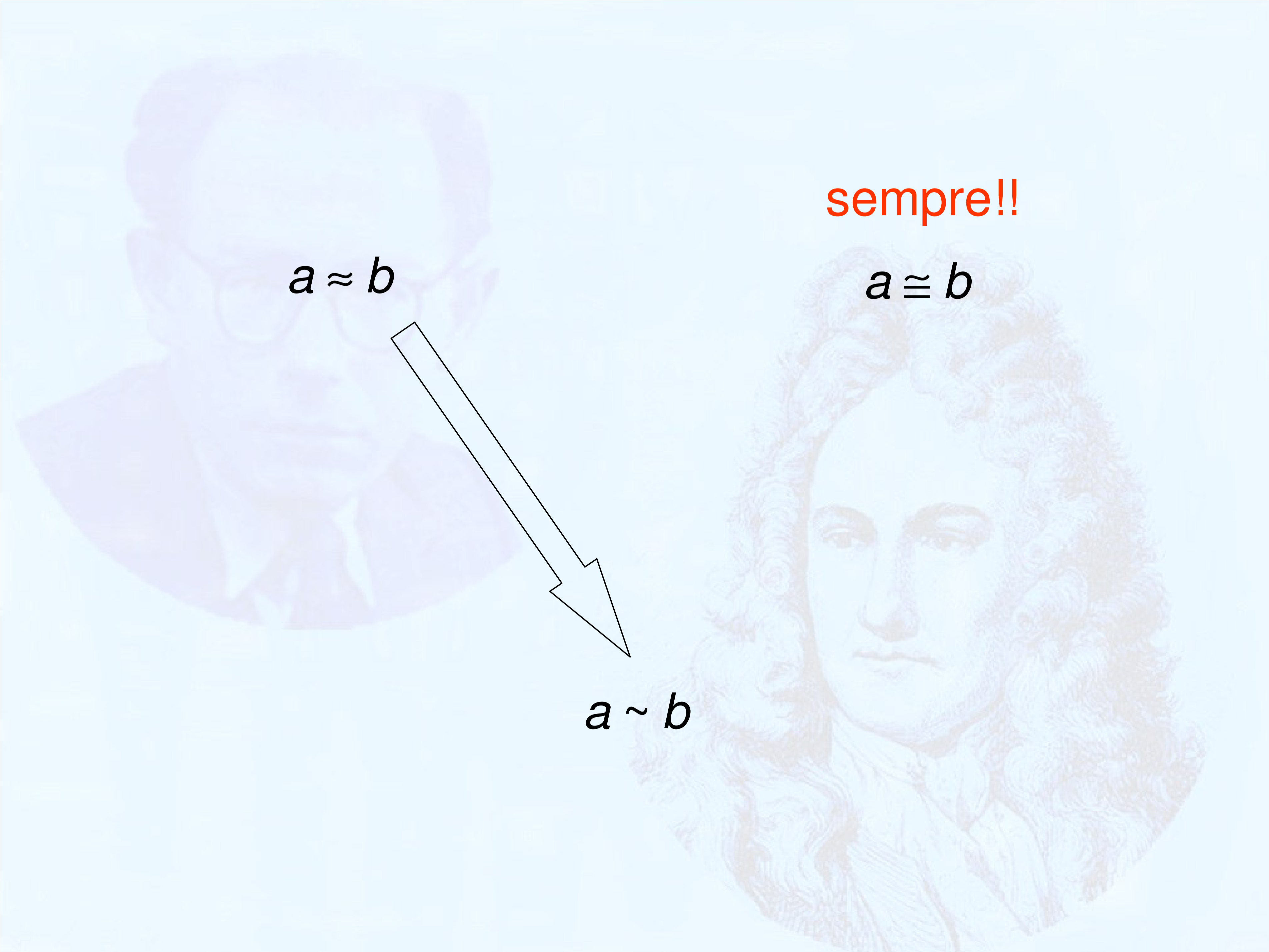


sempre!!

$a \approx b$

$a \cong b$

$a \sim b$

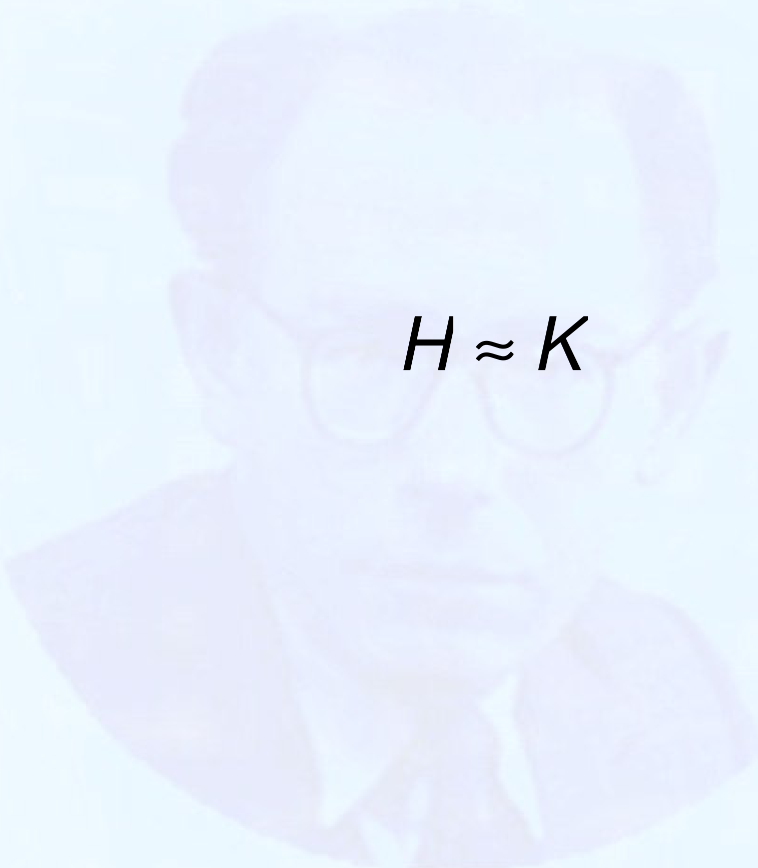

sempre!!
$a \approx b$
$a \cong b$
$a \sim b$

sempre!!

$a \approx b$

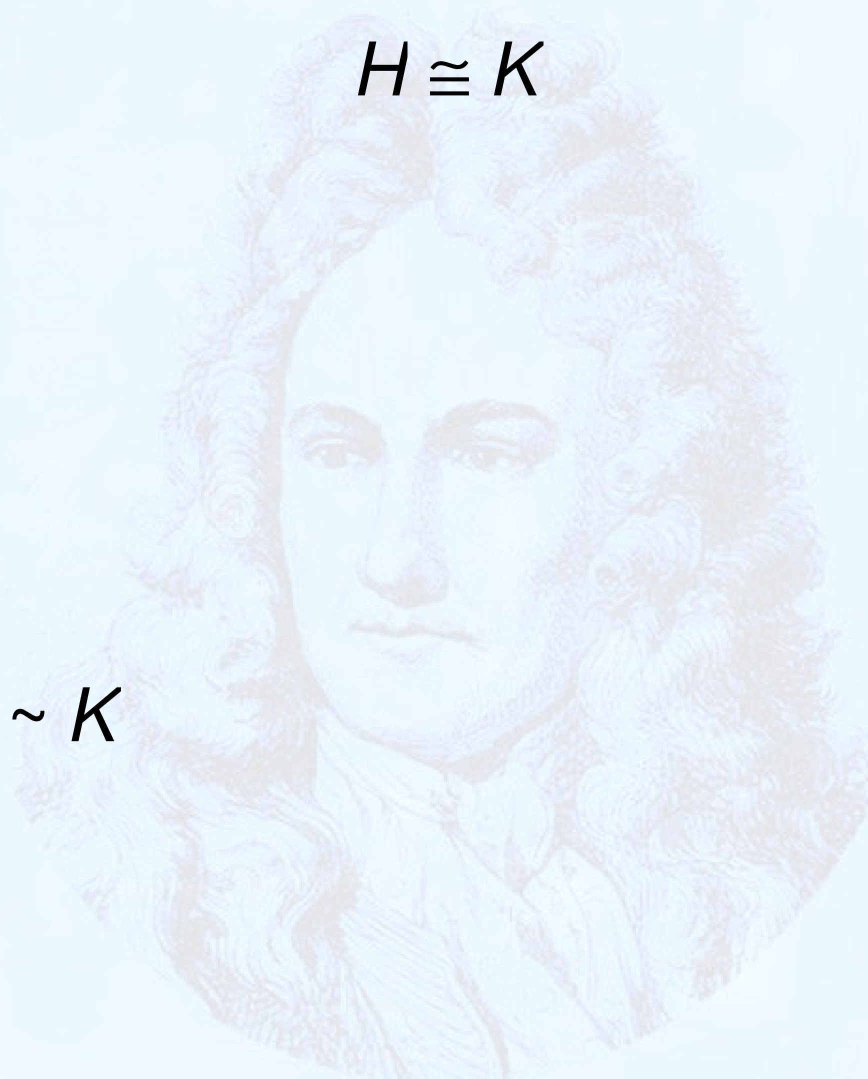
$a \cong b$

$a \sim b$



$H \approx K$

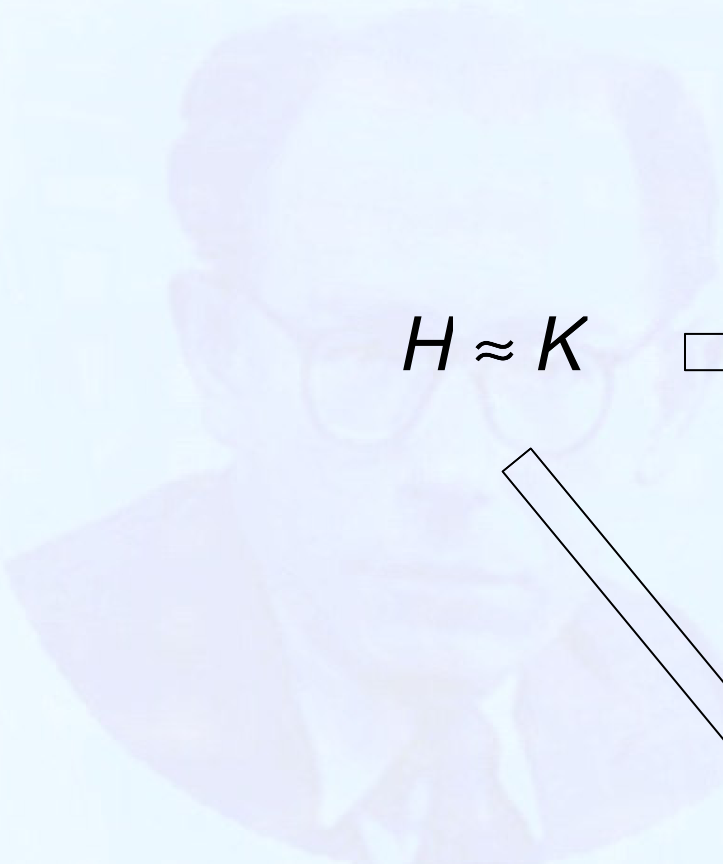
$H \cong K$

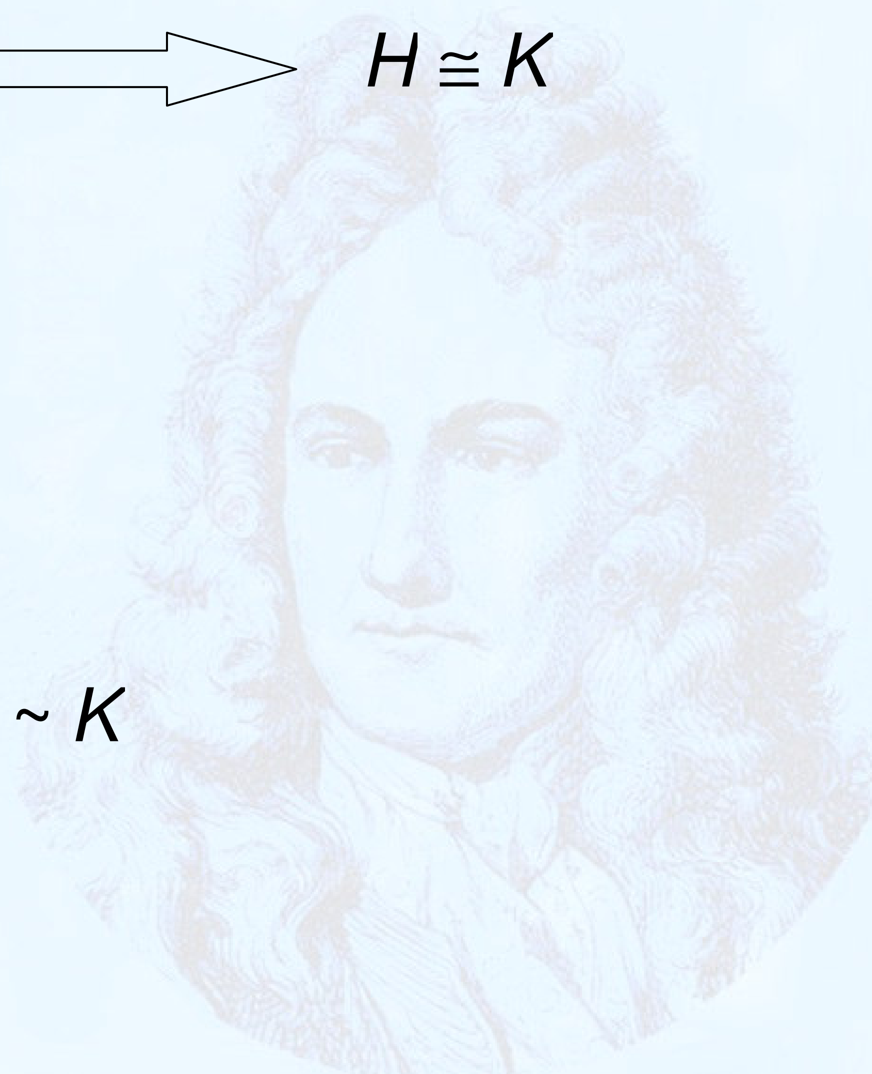


$H \sim K$

$$H \approx K \quad \Longrightarrow \quad H \cong K$$

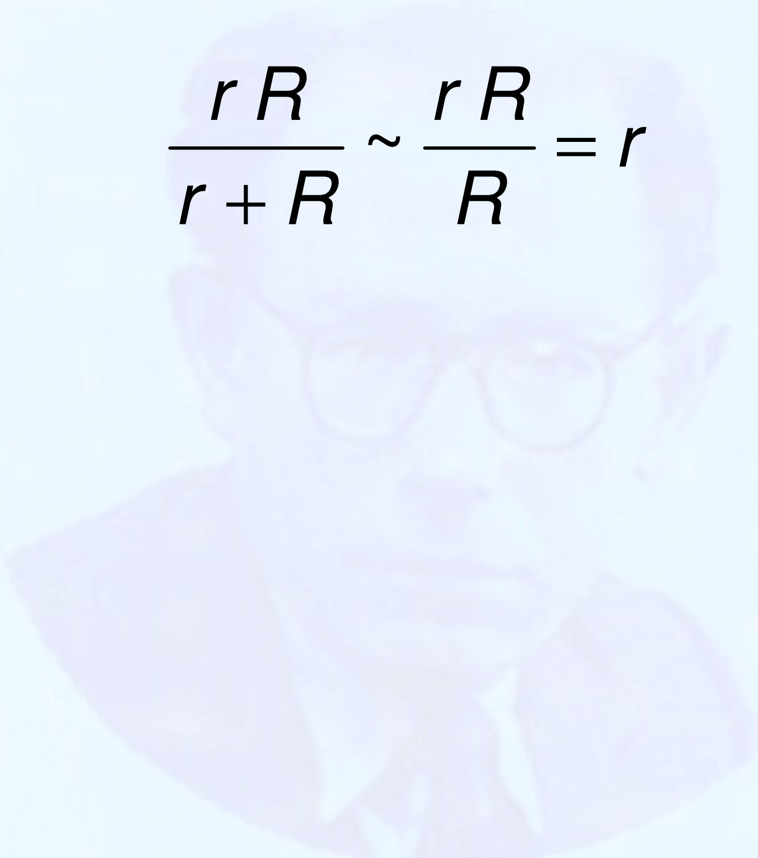
$$H \sim K$$





$$\begin{tikzcd}
H \approx K \arrow[rr, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & H \cong K \\
& H \sim K &
\end{tikzcd}$$

$$
\begin{tikzcd}
H \approx K \arrow[rr, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & H \cong K \arrow[dl, Rightarrow] \\
& H \sim K &
\end{tikzcd}
$$



$$\frac{r\,R}{r+R} \sim \frac{r\,R}{R} = r \qquad \frac{r\,R}{r+R} \approx r$$

$$\frac{r\,R}{r+R} \sim \frac{r\,R}{R} = r \qquad \frac{r\,R}{r+R} \approx r$$

$$\frac{r\,\rho}{r+\rho} \sim \frac{r\,\rho}{r} = \rho \qquad \frac{r\,\rho}{r+\rho} \sim \rho$$

$$\frac{r\,R}{r+R} \sim \frac{r\,R}{R} = r \qquad \frac{r\,R}{r+R} \approx r$$

$$\frac{r\,\rho}{r+\rho} \sim \frac{r\,\rho}{r} = \rho \qquad \frac{r\,\rho}{r+\rho} \sim \rho$$

$$\frac{5\sigma^3 - 2\sigma^4}{\sigma^5 - \sigma^3} \sim \frac{5\sigma^3}{-\sigma^3} = -5 \qquad \frac{5\sigma^3 - 2\sigma^4}{\sigma^5 - \sigma^3} \approx -5$$

$$\frac{r\,R}{r+R} \sim \frac{r\,R}{R} = r \qquad \frac{r\,R}{r+R} \approx r$$

$$\frac{r\,\rho}{r+\rho} \sim \frac{r\,\rho}{r} = \rho \qquad \frac{r\,\rho}{r+\rho} \sim \rho$$

$$\frac{5\sigma^3 - 2\sigma^4}{\sigma^5 - \sigma^3} \sim \frac{5\sigma^3}{-\sigma^3} = -5 \qquad \frac{5\sigma^3 - 2\sigma^4}{\sigma^5 - \sigma^3} \approx -5$$

$$\frac{8M^4 - 5M^3}{4M^3 + 10^9} \sim \frac{8M^4}{4M^3} = 2M \qquad \frac{8M^4 - 5M^3}{4M^3 + 10^9} \sim 2M$$

$$\frac{1}{\delta}\left(\frac{1}{2+\delta}-\frac{1}{2}\right)\sim\frac{1}{\delta}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)=0$$

$$\frac{1}{\delta}\left(\frac{1}{2+\delta}-\frac{1}{2}\right)\sim\frac{1}{\delta}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)=0$$

Non è possibile essere indistinguibili dallo zero!!

$$\frac{1}{\delta}\left(\frac{1}{2+\delta}-\frac{1}{2}\right) \sim \frac{1}{\delta}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)=0$$

Non è possibile essere indistinguibili dallo zero!!

$$\frac{1}{\delta}\left(\frac{1}{2+\delta}-\frac{1}{2}\right)=\frac{-\delta}{2\delta(2+\delta)}=-\frac{1}{2(2+\delta)} \sim -\frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{\delta}\left(\frac{1}{2+\delta}-\frac{1}{2}\right) \approx -\frac{1}{4}$$


il professor
APOTEMA
insegna...
I NUMERI IPERREALI
GIORGIO GOLDONI


il professor
APOTEMA
insegna...
IL CALCOLO DELLE
DIFFERENZE
E
IL CALCOLO
DIFFERENZIALE
GIORGIO GOLDONI


il professor
APOTEMA
insegna...
IL CALCOLO DELLE
SOMME
E
IL CALCOLO
INTEGRALE
GIORGIO GOLDONI